

NNT : 2012 EMSE 0652

## THÈSE

présentée par

Sébastien NADLER

pour obtenir le grade de  
Docteur de l'École Nationale Supérieure des Mines de Saint-Étienne

Spécialité : Génie des procédés

COMPORTEMENT D'UN MILIEU GRANULAIRE SOUMIS A DES  
VIBRATIONS HORIZONTALES

ETUDES NUMERIQUES ET EXPERIMENTALES

soutenue à Saint-Etienne, le 10 mai 2012

Membres du jury

Président :	Christian COURTOIS	
Rapporteurs :	Mojtaba GHADIRI	Professeur, Université de Leeds
	Alain De RYCK	Professeur, Ecole des Mines d'Albi-Carmaux
Examineurs :	Christian COURTOIS	Professeur, Université de Valenciennes
	Olivier BONNEFOY	Maître Assistant, Ecole Nationale Supérieure des Mines de Saint-Etienne
	Jean-Louis GELET	Ingénieur, société MERSEN, Saint-Bonnet De Mure
Directeurs de thèse	Gérard THOMAS	Professeur, Ecole Nationale Supérieure des Mines de Saint-Etienne
	Jean-Marc CHAIX	Directeur de recherche, Grenoble INP, Grenoble

**Spécialités doctorales :**

SCIENCES ET GENIE DES MATERIAUX  
MECANIQUE ET INGENIERIE

**GENIE DES PROCEDES**

SCIENCES DE LA TERRE  
SCIENCES ET GENIE DE L'ENVIRONNEMENT  
MATHEMATIQUES APPLIQUEES  
INFORMATIQUE  
IMAGE, VISION, SIGNAL  
GENIE INDUSTRIEL  
MICROELECTRONIQUE

**Responsables :**

J. DRIVER Directeur de recherche – Centre SMS

F. GRUY Professeur – Centre SPIN  
B. GUY Maître de recherche – Centre SPIN  
J. BOURGOIS Professeur – Fayol  
E. TOUBOUL Ingénieur – Fayol  
O. BOISSIER Professeur – Fayol  
JC. PINOLI Professeur – Centre CIS  
P. BURLAT Professeur – Fayol  
Ph. COLLOT Professeur – Centre CMP

**Enseignants-chercheurs et chercheurs autorisés à diriger des thèses de doctorat (titulaires d'un doctorat d'État ou d'une HDR)**

AVRIL	Stéphane	MA	Mécanique & Ingénierie	CIS
BATTON-HUBERT	Mireille	MA	Sciences & Génie de l'Environnement	Fayol
BENABEN	Patrick	PR 1	Sciences & Génie des Matériaux	CMP
BERNACHE-ASSOLLANT	Didier	PR 0	Génie des Procédés	CIS
BIGOT	Jean-Pierre	MR	Génie des Procédés	SPIN
BILAL	Essaïd	DR	Sciences de la Terre	SPIN
BOISSIER	Olivier	PR 1	Informatique	Fayol
BORBELY	Andras	MR	Sciences et Génie des Matériaux	SMS
BOUCHER	Xavier	MA	Génie Industriel	Fayol
BOUDAREL	Marie-Reine	PR 2	Génie Industriel	DF
BOURGOIS	Jacques	PR 0	Sciences & Génie de l'Environnement	Fayol
BRODHAG	Christian	DR	Sciences & Génie de l'Environnement	Fayol
BURLAT	Patrick	PR 2	Génie industriel	Fayol
COLLOT	Philippe	PR 1	Microélectronique	CMP
COURNIL	Michel	PR 0	Génie des Procédés	SPIN
DAUZERE-PERES	Stéphane	PR 1	Génie industriel	CMP
DARRIEULAT	Michel	IGM	Sciences & Génie des Matériaux	SMS
DECHOMETS	Roland	PR 1	Sciences & Génie de l'Environnement	Fayol
DESRAYAUD	Christophe	MA	Mécanique & Ingénierie	SMS
DELAFOSSÉ	David	PR 1	Sciences & Génie des Matériaux	SMS
DOLGUI	Alexandre	PR 1	Génie Industriel	Fayol
DRAPIER	Sylvain	PR 2	Mécanique & Ingénierie	SMS
DRIVER	Julian	DR 0	Sciences & Génie des Matériaux	SMS
FEILLET	Dominique	PR 2	Génie Industriel	CMP
FOREST	Bernard	PR 1	Sciences & Génie des Matériaux	CIS
FORMISYN	Pascal	PR 1	Sciences & Génie de l'Environnement	Fayol
FRACZKIEWICZ	Anna	DR	Sciences & Génie des Matériaux	SMS
GARCIA	Daniel	MR	Sciences de la terre	SPIN
GIRARDOT	Jean-Jacques	MR	Informatique	Fayol
GOEURLOT	Dominique	MR	Sciences & Génie des Matériaux	SMS
GRAILLOT	Didier	DR	Sciences & Génie de l'Environnement	Fayol
GROSSEAU	Philippe	MR	Génie des Procédés	SPIN
GRUY	Frédéric	MR	Génie des Procédés	SPIN
GUY	Bernard	MR	Sciences de la Terre	SPIN
GUYONNET	René	DR	Génie des Procédés	SPIN
HERRI	Jean-Michel	PR 2	Génie des Procédés	SPIN
INAL	Karim	PR 2	Microélectronique	CMP
KLÖCKER	Helmut	DR	Sciences & Génie des Matériaux	SMS
LAFOREST	Valérie	CR	Sciences & Génie de l'Environnement	Fayol
LERICHE	Rodolphe	CR CNRS	Mécanique et Ingénierie	SMS
LI	Jean-Michel	EC (CCI MP)	Microélectronique	CMP
MALLIARAS	George Grégory	PR 1	Microélectronique	CMP
MOLIMARD	Jérôme	MA	Mécanique et Ingénierie	SMS
MONTHEILLET	Frank	DR 1 CNRS	Sciences & Génie des Matériaux	SMS
PERIER-CAMBY	Laurent	PR 2	Génie des Procédés	SPIN
PIJOLAT	Christophe	PR 1	Génie des Procédés	SPIN
PIJOLAT	Michèle	PR 1	Génie des Procédés	SPIN
PINOLI	Jean-Charles	PR 0	Image, Vision, Signal	CIS
STOLARZ	Jacques	CR	Sciences & Génie des Matériaux	SMS
SZAFNICKI	Konrad	MR	Sciences & Génie de l'Environnement	Fayol
<b>THOMAS</b>	<b>Gérard</b>	PR 0	Génie des Procédés	SPIN
TRIA	Assia		Microélectronique	CMP
VALDIVIESO	François	MA	Sciences & Génie des Matériaux	SMS
VIRICELLE	Jean-Paul	MR	Génie des procédés	SPIN
WOLSKI	Krzysztof	DR	Sciences & Génie des Matériaux	SMS
XIE	Xiaolan	PR 1	Génie industriel	CIS

**Glossaire :**

PR 0	Professeur classe exceptionnelle
PR 1	Professeur 1 <sup>ère</sup> classe
PR 2	Professeur 2 <sup>ème</sup> classe
MA(MDC)	Maître assistant
DR	Directeur de recherche
Ing.	Ingénieur
MR(DR2)	Maître de recherche
CR	Chargé de recherche
EC	Enseignant-chercheur
IGM	Ingénieur général des mines

Dernière mise à jour le : 23 août 2011

**Centres :**

SMS	Sciences des Matériaux et des Structures
SPIN	Sciences des Processus Industriels et Naturels
Fayol	Institut Henri Fayol
CMP	Centre de Microélectronique de Provence
CIS	Centre Ingénierie et Santé







Dans un grain de sable, voir un monde.

William Blake



# Remerciements

Tout d'abord, je remercie les professeurs Motjaba Ghadiri et Alain De Ryck d'avoir accepté d'être rapporteur de cette thèse et de l'intérêt qu'ils ont porté à mon travail. Je remercie également le professeur Christian Courtois pour ses remarques pertinentes et pour avoir accepté la tâche de président du jury. Merci encore à l'ensemble du jury de m'avoir accordé le titre de docteur de l'Ecole Nationale Supérieure des Mines de Saint-Etienne.

Bien sûr, j'éprouve une certaine fierté personnelle d'être allé au bout de ce projet. Mais je suis surtout très fier d'avoir pu réaliser ce parcours humain auprès de mes encadrants, collègues et collaborateurs. Sans eux, rien n'aurait été possible.

Je tiens à remercier Olivier Bonnefoy, Maître assistant à l'Ecole des Mines de Saint-Etienne, pour sa gentillesse, pour son esprit à la fois emprunt d'une grande rigueur scientifique et débordant d'imagination. Pour des milliers de considérations de tout genre, l'enthousiasme et la curiosité s'emparent de l'esprit d'Olivier. Un matin, il m'apportait quelques feuilles remplies de calcul en me disant qu'il avait eu des idées dans la nuit. D'une insomnie d'Olivier pouvait naître six mois de travail : commande de matériel, expérimentations, bibliographie, validations et vérifications diverses... La panne d'inspiration ne pouvait donc jamais tenir longtemps avec Olivier en collaborateur. Sans lui, aborder le sujet aurait été beaucoup moins enthousiasmant et beaucoup plus laborieux.

Merci bien sûr à Gérard Thomas, professeur émérite à l'Ecole des Mines de Saint-Etienne, mon directeur de thèse, pour sa gentillesse aussi, pour sa grande culture scientifique, pour sa pédagogie et pour son sens des responsabilités. Malgré son planning chargé, il a toujours été disponible et présent. Un peu plus de soixante ans maintenant, mais quelle énergie et vivacité d'esprit ! Il reste pour moi un exemple à suivre.

Gérard et Olivier, je n'oublierai pas votre soutien et votre aide qui ont largement dépassé le cadre professionnel. En particulier dans ces moments où j'étais déboussolé. Je vous garde beaucoup d'estime et suis heureux d'avoir pu passer ce bout de chemin à vos côtés.

Merci à Jean-Marc Chaix, chargé de recherche au laboratoire SIMAP. L'esprit critique et les remarques pertinentes de Jean-Marc ont toujours permis d'enrichir mon travail.

Merci à Jean-Louis Gelet, ingénieur sénior du groupe MERSEN, curieux de tout et avec un esprit pratique, il a pu nous donner un point de vue industriel sur nos recherches. Par la même occasion, merci au groupe MERSEN d'avoir porté et soutenu ces recherches. Il était en effet très motivant de voir l'intérêt que pouvait susciter nos résultats dans le cadre d'une problématique industrielle réelle. Je remercie aussi Jean-Louis d'avoir su valoriser nos résultats grâce au dépôt d'un brevet.

Nos réunions dont Jean-Marc, Jean-Louis, Gérard, Olivier et moi-même étions les intervenants principaux, ont toujours permis de générer beaucoup de motivation et de nouvelles idées. De plus, ce furent toujours des moments conviviaux et agréables. J'en garderai un très bon souvenir. Merci aussi à eux pour les multiples corrections d'orthographe et de formes qu'ils ont pu apporter. Ce n'était pas une mince affaire.

Merci à tous les techniciens de l'Ecole des Mines sans qui ce travail n'aurait pas pu être possible. En particulier, merci à Albert Boyer qui a réalisé en atelier la plupart des

dispositifs expérimentaux. Son adresse et son esprit pratique ont vraiment facilité mon travail. Merci aussi aux secrétaires, Carole en particulier, et à Jérôme du service informatique pour leur aide.

Merci à tous mes collègues, doctorants ou permanents, ceux de la cafeteria du C3, ceux de la cantine, du tarot, des soirées, et tous ceux qui ont pu rendre mon séjour à Saint-Etienne beaucoup plus sympathique. Désolé pour ceux que j'oublie, je me risque à citer quelques noms : Virginie, Geoffroy, Marie-Claude, Damien, Najih, Ahmed, Laetitia, Jinan, Marina, Damien, Pedro, Raquel, Zaher, Ivan, Pauline, Thomas, Henri, Coralie, Timothée, Luis...

Merci aussi aux partenaires et aux gérants du club de squash de Saint-Etienne, pour tous ces moments où j'ai pu me défouler physiquement et me vider la tête après mes journées de travail. C'était aussi une partie importante de ma vie à Saint-Etienne et de mon équilibre.

Merci à ma famille, ma mère pour m'avoir donné le goût des sciences et mon père pour m'avoir appris à faire de mon mieux, à travailler et à aller au bout des choses.

Merci enfin à Isabelle qui m'a toujours soutenu durant cette thèse. Je te dois beaucoup. C'est aussi grâce à toi que j'ai réussi à tenir la barre.





# Table des matières

Introduction .....	1
Première partie : Etude Bibliographique .....	7
Chapitre I Généralités sur les milieux granulaires.....	7
I.A Un peu d'histoire .....	7
I.B Caractérisation du milieu granulaire .....	10
I.B.1 Caractérisation géométrique.....	11
I.B.1.a Morphologie des grains.....	11
I.B.1.b Sur la notion de densité.....	12
I.B.2 Caractérisation mécanique.....	14
I.B.2.a Statique .....	14
I.B .2.a.i Angle de talus/Coefficient de friction.....	14
I.B .2.a.ii Définition de la notion de tenseur des contraintes pour un milieu granulaire	15
♦ Rappels classiques de mécanique des milieux continus et notations ..	15
♦ Relations propres aux milieux granulaires .....	17
I.B .2.a.iii Cercle de Mohr dans une géométrie 2D .....	19
I.B .2.a.iv Critère de Mohr-Coulomb .....	23
I.B .2.a.v Le modèle de Janssen.....	24
I.B.2.b Dynamique.....	25
I.B .2.b.i Le phénomène de ségrégation .....	25
♦ Ecoulements dans un tambour tournant.....	27
♦ Silo : ségrégation par déversement en tas .....	28
♦ Ségrégation par vibrations verticales .....	29
I.B .2.b.ii Coulabilité .....	31
I.B .2.b.iii Dissipation d'énergie à l'échelle des grains .....	34
I.B .2.b.iv Température granulaire.....	36
I.B .2.b.v Analyse dimensionnelle.....	37
Chapitre II Les méthodes numériques.....	41
II.A La méthode des éléments discrets .....	41
II.B Autres méthodes existantes .....	47
II.B.1 Sphères dures (« Event Driven »).....	47
II.B.2 Monte-Carlo.....	49
II.B.3 Automates cellulaires.....	49

Chapitre III	Milieu granulaire soumis à des vibrations .....	53
III.A	Phénoménologie .....	53
III.A.1	Considérations générales.....	53
III.A.2	Précisions sur les étapes dans le procédé de compaction ainsi que sur la mise en place d'un régime stationnaire .....	59
III.A.3	Dissipation d'énergie .....	62
III.B	Caractérisation fine de l'influence de l'accélération de la fréquence et de la friction.....	69
III.B.1	Influence de paramètres procédés .....	69
III.B.1.a	Influence de l'accélération $\Gamma$ et de la fréquence $f$ sur la vitesse des grains en face Nord (vibrations horizontales) .....	69
III.B.1.b	Influence de l'accélération $\Gamma$ et de la fréquence $f$ sur la densité .....	71
III.B.1.b.i	Cas des vibrations verticales : .....	72
III.B.1.b.ii	Cas des vibrations horizontales.....	74
III.B.2	Influence de la géométrie du récipient et de la nature des matériaux ...	77
III.B.2.a	Taille du contenant et hauteur de l'empilement granulaire.....	77
III.B.2.a.i	Cas des vibrations verticales .....	77
III.B.2.a.ii	Cas des vibrations horizontales.....	78
III.B.2.a.iii	Influence de la hauteur initiale de l'empilement sur l'épaisseur fluidisée et la vitesse des grains.....	80
III.B.2.b	Taille des grains .....	82
III.B.2.c	Coefficient de friction .....	82
Conclusion de la partie 1	.....	85
Deuxième partie :	Matériel et Méthode.....	89
Chapitre IV	Expériences mises en œuvre, matériaux et outils de caractérisation ....	91
IV.A	Dispositif expérimental .....	91
IV.A.1	Caractéristiques du système de vibration .....	91
IV.A.2	Caractéristiques des boîtes contenant les grains .....	93
IV.A.3	Acquisition d'images : utilisation d'une caméra CCD et du logiciel « <i>MOTION 2D</i> » .....	94
IV.A.4	Fonctionnement du profilomètre optique et mesure de la compacité ...	95
IV.A.5	Principe de fonctionnement du microtomographe à rayons X.....	97
IV.B	Matériaux.....	99
IV.B.1	Nature chimique des grains et densité.....	99
IV.B.2	Masse volumique .....	99
IV.B.3	Morphologie des grains.....	99
IV.B.3.a	Distribution granulométrique .....	100



IV.B.3.b Cohésion et angle de friction interne .....	102
IV.B.3.c Coulabilité.....	104
IV.B.3.d Angle de Talus .....	104
Chapitre V Stratégie de modélisation.....	107
V.A Discrétisation de l'espace et du temps.....	107
V.A.1 Repérage temporel .....	108
V.A.2 Repérage dans l'espace .....	108
V.B Description lagrangienne et description eulérienne .....	109
V.B.1 Champ de compacité.....	110
V.B.2 Champ de vitesse .....	113
V.B.3 Durée à considérer entre deux mesures pour établir des vitesses moyennes 115	
V.B.4 Flux de matière .....	116
V.B.5 Champ de contraintes .....	117
V.C Validation et optimisation de la méthode numérique.....	118
V.C.1 Liste des paramètres utilisés .....	118
V.C.2 Procédé numérique de préparation du milieu granulaire .....	120
V.C.3 Conditions aux limites périodiques .....	121
V.C.3.a Définition de la cellule périodique .....	121
V.C.3.b Largeur limite de la cellule périodique .....	122
V.C.4 Calibrage sur expériences de référence .....	124
V.C.4.a Utilisation de sable .....	124
V.C.4.b Utilisation de billes de silice .....	126
V.C.5 Talus dynamique.....	127
V.C.5.a Etude expérimentale : mesure de l'angle de talus par la méthode de la paroi amovible (MPA).....	127
V.C.5.b Etude numérique : mesure de l'angle de talus par la méthode de la paroi amovible (MPA).....	128
Conclusion de la deuxième partie .....	132
Troisième partie : Travaux expérimentaux et numériques .....	135
Chapitre VI Etudes en milieu ouvert.....	136
VI.A Etude phénoménologique d'un milieu granulaire vibré (simulation).....	136
VI.A.1 Déplacement de matière .....	136
VI.A.1.a Création d'un espace latéral Nord/Sud de faible densité .....	136
VI.A.1.b Flux et régime stationnaire .....	138
VI.A.1.c Flux et débits de matière .....	139
VI.A.2 Etude de la sensibilité aux paramètres .....	141

VI.A.2.a	Influence de l'accélération $\Gamma$ sur la vitesse et la compacité.....	141
VI.A.2.b	Influence de l'accélération $\Gamma$ sur la compacité : étude complémentaire à l'aide du microtomographe .....	144
VI.A.2.c	Influence de la fréquence (simulation) .....	146
VI.A.2.d	Influence de la longueur $L_x$ de la boîte .....	148
VI.A.2.e	Influence des coefficients de friction : étude numérique .....	150
VI.A.3	Etude numérique des contraintes s'exerçant dans le milieu granulaire 153	
VI.A.3.a	Présentation qualitative des chaînes de force 2D.....	153
VI.A.3.b	La représentation des contraintes sous forme de cercles de Mohr est- elle valable dans le cas dynamique ? .....	154
VI.A.3.b.i	Protocole opératoire et définitions.....	154
VI.A.3.b.ii	Sur les vitesses de grains .....	157
♦	Vitesses moyennes.....	157
♦	Vitesses instantanées .....	157
VI.A.3.b.iii	Evolution et analyse des contraintes .....	159
♦	Etat initial : cas statique.....	159
♦	Milieu granulaire vibré : $\Gamma=0,5$ , $\Gamma=1,5$ , $\Gamma=3$ , $\Gamma=5$ .....	162
♦	A retenir sur l'étude des contraintes .....	166
VI.A.4	Phénomène de ségrégation.....	167
VI.B	Travaux expérimentaux sur l'écoulement des grains dans un milieu granulaire vibré 168	
VI.B.1	Influence de l'aire de la surface d'écoulement .....	169
VI.B.2	Influence du positionnement et des paramètres procédés .....	172
VI.B.2.a	Influence de l'accélération .....	173
VI.B.2.b	Influence de la fréquence .....	176
Chapitre VII	Vibrations horizontales pour un système fermé.....	181
VII.A	Observations expérimentales.....	181
VII.A.1	Dispositif expérimental .....	181
VII.A.2	Protocole opératoire .....	183
VII.A.2.a	Influence de la position de l'entonnoir .....	184
VII.A.3	Résultats .....	185
VII.A.3.a	Première phase.....	185
VII.A.3.b	Deuxième phase .....	186
VII.B	Vers une caractérisation indirecte du remplissage .....	188
VII.B.1	Méthode de mesure expérimentale directe.....	190
VII.B.1.a	Définition de la masse apparente .....	190

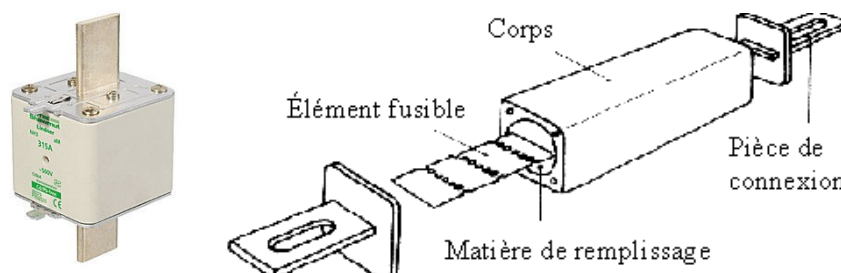
VII.B.1.b	Définition de la puissance dissipée.....	191
VII.B.2	Résultats bruts .....	192
VII.B.2.a	Masse apparente.....	192
VII.B.2.b	Puissance dissipée .....	195
VII.B.3	Utilisation de modèles descriptifs .....	198
VII.B.3.a	Description des modèles .....	199
VII.B .3.a.i	Modèle 1 : « Oscillations Amorties » (OA).....	199
♦	<i>Première approche – modèle 1-OAC</i> « Oscillations Amorties - Coulomb .....	200
♦	<i>Deuxième approche – modèle 1-OAV</i> « Oscillations Amorties avec Viscosité » .....	203
♦	Conclusion sur les deux approches et ouverture.....	206
VII.B .3.a.ii	Modèle 2 : « Oscillateur Harmonique Amorti » (OHA) .....	208
VII.B .3.a.iii	Modèle 3 : « chariot frottant » (CF) .....	212
VII.B.3.b	Remarques sur la détermination des paramètres des modèles.....	215
VII.B.3.c	Etude qualitative de la variation de la masse apparente .....	216
VII.B.3.d	Etude qualitative de la puissance dissipée.....	219
	Conclusion générale .....	225
	ANNEXES .....	233
	Bibliographie.....	243
	Nomenclature .....	249
	Table des figures .....	253
	Communications diverses.....	261



# Introduction

## Contexte Industriel

Ce travail de thèse nous a été inspiré par un problème industriel concret : le remplissage, par du sable, de fusibles à haut pouvoir de coupure (Figure 1). Ces recherches ont été entreprises dans le cadre d'un partenariat avec le groupe MERSEN, l'un des leaders dans le domaine de la protection électrique.



*Figure 1. Exemple de fusible électrique, Mersen Fusible carré NH pour semi-conducteur, Class aR 500 - 700 V AC, 16 - 1000 A | Protistor® et représentation schématique du fusible*

## Description du fonctionnement d'un fusible

Les fusibles à haut pouvoir de coupure sont constitués d'une boîte en céramique dans laquelle sont positionnées des lames conductrices en argent ou en cuivre. Du sable remplit les espaces vides autour des éléments conducteurs (Figure 1). Le sable est introduit par des trous disposés sur la paroi supérieure pendant que la boîte est soumise à des vibrations afin de procéder à une compaction du matériau granulaire. Ce procédé de remplissage est effectué à l'aide de machines appelées « ensableuses » (Figure 2). La vibration est produite grâce à des chocs imposés à la ligne de fusibles. Le signal résultant est bruité et complexe, divers harmoniques sont présents, mais la fréquence principale reste celle des chocs à environ 50 Hz.

Le sable ainsi compacté est ensuite aggloméré avec un liant, le silicate de sodium (sous forme liquide), permettant de figer la structure du milieu granulaire en un bloc compact. Remarquons que l'introduction du liant modifie peu la structure du milieu

## Introduction

granulaire. C'est bien la phase de mise en forme du milieu granulaire par vibrations qui détermine la structure finale de l'empilement.

Le fusible possède deux fonctions, l'une est la conduction du courant en régime normal, l'autre la coupure du courant en cas de surintensité électrique. Pendant la phase de conduction, le sable évacue la chaleur créée par effet Joule lors du passage du courant. Il joue un autre rôle en cas de surintensité électrique. Dans ce cas, les lames conductrices sont susceptibles de fondre ou de se sublimer. Le courant est ainsi stoppé et le reste du circuit électrique préservé. La coupure du circuit s'accompagne de la formation d'un arc électrique dans le fusible. Le matériau granulaire joue ainsi un double rôle : il permet une évacuation du métal fondu ou vaporisé à travers le milieu poreux ainsi que l'absorption de l'énergie de l'arc électrique (chaleur latente de fusion/sublimation). En évacuant la matière métallique et en absorbant le surplus d'énergie, on évite ainsi une éventuelle explosion du fusible.

### *Objectif industriel*

Notre étude se focalise sur le procédé de mise en forme de la matière de remplissage. Pour garantir des performances maximales pour les fusibles, nous cherchons à obtenir un empilement granulaire **le plus dense et le plus homogène possible**. A cet objectif s'ajoute pour l'industriel la volonté de garder son avance technologique, d'améliorer son niveau d'expertise sur les phénomènes intervenant lors de la compaction granulaire et de faire progresser le procédé industriel de remplissage.



*Figure 2. Ensableuses industrielles. Des chocs sont imposés à une fréquence de 50 Hz pendant que le sable est introduit par le dessus de la boîte fusible*

## Contexte Scientifique

Le laboratoire SPIN de l'école des Mines de Saint-Etienne ainsi que le laboratoire SIMAP de l'université de Grenoble collaborent sur la thématique de la compaction granulaire par vibrations depuis une dizaine d'années avec le service R&D du groupe Mersen. Deux thèses expérimentales ont été réalisées sur le sujet. L'une, effectuée par Emilie Rouèche (2005), concernait la compaction d'un milieu granulaire par vibrations verticales. L'autre thèse traitant de la compaction d'un milieu granulaire par vibrations horizontales, a été réalisée par Ahmed Raihane (2009).

Consacrée aux vibrations verticales, qui sont de loin les plus étudiées dans la littérature, la thèse d'Emilie Rouèche a abordé divers sujets comme l'influence de la morphologie des grains et celle des dimensions du récipient. Elle a élaboré des diagrammes de densité en fonction de l'accélération et de la fréquence délivrée. Les mouvements de grains rencontrés ont été décrits en fonction des paramètres imposés : fréquence, accélération, taille du récipient, hauteur de l'empilement de grains dans le récipient. Selon les paramètres de vibration, elle constate l'apparition de 1 à 4 rouleaux de convection. Des seuils de mise en mouvement ont été déterminés. Des analyses de la densité du milieu granulaire après vibration ont été réalisées par tomographie X. Ces analyses ont permis en particulier d'étudier la densité locale pour des récipients de petite taille et d'observer en trois dimensions les contacts s'établissant entre les grains. Les phénomènes de voûte dans le milieu granulaire ont aussi été étudiés.

Dans la thèse d'Ahmed Raihane, un dispositif expérimental permettant l'étude des vibrations horizontales a été développé. Les vitesses de grains ont été évaluées de manière plus précise grâce à une méthode PIV (Particle Image Velocimetry) élaborée au laboratoire. La mise en place d'un outil de profilométrie optique a aussi permis d'évaluer les densités globales du milieu granulaire avec une bonne précision. Une description précise de la phénoménologie en fonction de l'accélération  $y$  est particulièrement détaillée. On note l'apparition de deux rouleaux de convection contrarotatifs ainsi que l'existence de différents états de surface dépendant de l'accélération et de la fréquence délivrée (une ou deux bosses, surface plane...). Grâce à l'outil PIV, une caractérisation des mouvements dans le milieu granulaire a été réalisée en observant les vitesses de chute des grains au niveau des parois en plexiglas. Des corrélations entre la mise en mouvement

de différentes zones du milieu granulaire et les compacités finales et locales ont été établies. On peut aussi retenir de ce travail la mise au point de méthodes permettant d'obtenir une forte compacité comme des cycles de croissance et la décroissance progressive de l'accélération adimensionnée  $\Gamma$  qui ont été à l'origine d'un brevet déposé par le groupe Mersen et ses partenaires académiques.

Les résultats obtenus dans les précédentes études avaient ouvert un ensemble de questions qui motivaient de nouvelles approches.

La première de ces approches était celle de la modélisation numérique. Nous cherchions un accès à des paramètres physiques inaccessibles par l'expérience comme les contraintes subies par les grains, la température granulaire, ou encore les vitesses et densités au cœur de l'empilement de sable. Avant même l'emploi de méthodes de simulation, il fallait déterminer s'il était possible d'étudier le comportement d'un milieu granulaire soumis à des vibrations à l'aide d'un outil de simulation. Le choix et l'évaluation du potentiel de la méthode de modélisation ainsi que l'élaboration des algorithmes permettant son utilisation restaient à effectuer.

La deuxième approche consistait à s'approcher au plus près du système industriel réel. Dans ce cadre, l'influence d'obstacles dans l'empilement granulaire, l'étude du remplissage d'une boîte disposant d'un toit (milieu granulaire confiné), l'étude de la compaction par des chocs, l'étude de vibrations complexes combinant des composantes horizontales et verticales, suscitaient notre intérêt.

Enfin, l'étude de phénomènes et paramètres originaux comme la dissipation d'énergie, les contraintes dans l'empilement granulaire, l'effet de la taille des boîtes, l'effet des frictions, le nombre et l'orientation des contacts entre les grains (...), pouvaient relever de notre champ d'investigation.

Ainsi, pour toute cette étude, nous aurons deux objectifs majeurs : l'amélioration des connaissances fondamentales sur la rhéologie des milieux granulaires vibrés horizontalement, et l'application de ces connaissances à la résolution de problèmes industriels d'optimisation de la compaction de sable dans des récipients de forme et dimensions variées.



## Plan de l'ouvrage

Dans la première partie de ce manuscrit, nous présenterons le contexte bibliographique. Nous aborderons d'abord certaines notions générales permettant de caractériser un milieu granulaire dans son état statique ou dynamique et exposerons certains phénomènes classiques comme la ségrégation ou l'effet Janssen. Nous présenterons ensuite diverses méthodes numériques. Leurs algorithmes et leurs champs opérationnels y sont détaillés afin de justifier le choix que nous avons réalisé dans nos études (méthode dite des éléments discrets ou DEM). Enfin, nous nous attacherons à détailler les études ayant déjà été effectuées sur la densification granulaire par vibrations. Différentes études paramétriques classiques pouvant nous servir de référence dans la suite de l'exposé seront alors reprises. Certaines études originales qui ont inspiré nos travaux seront aussi présentées.

Dans la deuxième partie, nous présenterons le matériel et les méthodes utilisées. Tout d'abord, nous nous attacherons à décrire la partie expérimentale, et le fonctionnement de certains dispositifs techniques utilisés, comme la tomographie X ou la méthode PIV. Diverses études de caractérisation (granulométrie, masse volumique, composition chimique,...) sont réalisées. Ensuite, l'algorithmique permettant l'utilisation de l'outil de simulation sera détaillée. L'établissement d'une série de paramètres de modélisation de référence sera réalisé. La validation de la méthode de modélisation, le choix des paramètres et l'algorithmique développée seront examinés en comparant une série de résultats expérimentaux à des résultats simulés.

Dans la dernière partie, nous présenterons les résultats de nos travaux. Tout d'abord, nous présenterons ceux correspondant au cas d'un milieu semi-ouvert (boîte ouverte sur le dessus). Dans ce cas, une grande place sera faite à la présentation de résultats de simulations qui seront comparés (quand cela a été jugé nécessaire et possible) aux résultats expérimentaux. Ensuite, nous présenterons nos résultats propres à un milieu fermé. Dans ce dernier cas, l'élaboration d'une technique de contrôle de la qualité du remplissage a été présentée.



# Première partie :

## Etude Bibliographique

### Chapitre I Généralités sur les milieux granulaires

#### I.A Un peu d'histoire

Des penseurs illustres ont contribué à la connaissance de la physique des milieux granulaires. Dans l'Antiquité déjà, le grec Apollonius de Perge (262-190 av. JC) qui donna à l'ellipse, la parabole et l'hyperbole les noms que nous leur connaissons, s'intéressa à des problèmes de remplissage. Une de ses réflexions, connue sous le nom de « 10<sup>ème</sup> problème d'Apollonius » l'a conduit à élaborer une méthode permettant de trouver les cercles tangents à trois autres cercles. Ils se trouvent généralement être au nombre de 8. En utilisant ce principe de cercles tangents, il imagine déjà un remplissage 2D très dense illustré Figure 3 par la rosace qui porte son nom. Une notion intuitive sur la densité d'un empilement granulaire est déjà suggérée à cette époque : pour obtenir un milieu granulaire de très grande densité, une grande disparité de tailles de grains doit être introduite. Ainsi, les espaces libres entre les grosses particules sont comblés par les plus petites. Géométriquement, un tel empilement est facilement envisageable. Néanmoins, dans la pratique, un milieu granulaire présentant une grande polydispersité de particules pose des problèmes de ségrégation. En d'autres termes, il est difficile d'obtenir des mélanges homogènes. Ces problèmes s'illustrent de nos jours dans l'élaboration de bétons hautes performances où des particules de tailles différentes sont mélangées afin d'obtenir de fortes densités [1].

Deux siècles plus tard, Lucrèce (55 av. J.C.), philosophe, savant et poète latin de l'Antiquité s'étonne des analogies entre un milieu granulaire et un liquide : « On peut ramasser avec une écope des graines de pavot aussi aisément que si c'était de l'eau ; si vous les renversez, celles-ci s'écouleront en un flux continu » [2]. Ce caractère tantôt

liquide tantôt solide du milieu granulaire rend la compréhension de son comportement très difficile.

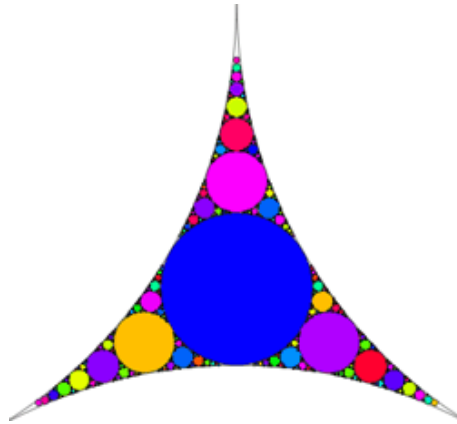


Figure 3. Rosace d'Apollonius (<http://numb3rs.wolfram.com/>)

Les véritables avancées scientifiques sur l'étude des milieux granulaires ne s'établirent que bien plus tard avec des lois précises. Ainsi, Charles de Coulomb (1736-1806) dans « Essai sur une application de règles des maximis et minimis à quelques problèmes de statique, relatifs à l'architecture » [3], effectue une série d'observations sur l'équilibre des talus. Il est à l'origine de la célèbre loi de Coulomb sur le frottement solide ainsi que de son extension au domaine des milieux granulaires. Le modèle numérique DEM (Discrete Element Method ou Méthode des Eléments Discrets en français) décrivant le comportement des grains, que nous avons utilisé dans cette thèse, implémente d'ailleurs cette loi. Michel Faraday (1791-1867), parallèlement à ses études sur les instabilités hydrodynamiques, s'intéresse à l'effet de l'air dans le processus de structuration périodique d'un milieu granulaire soumis à des vibrations [4]. William Rankine (1820-1872), se basant sur les travaux de Coulomb, étudie l'influence de la friction dans les milieux granulaires. Il introduit la notion d'états passif et actif qui porte son nom [5] présentés en annexe. Vient ensuite Janssen qui s'intéresse au phénomène de saturation de la pression dans les silos à grains [6]. Avec un système de balance astucieux, il établit la loi qui porte son nom (section I.B.2.a ). Par ailleurs, Reynolds [7] s'intéresse au phénomène de dilatance observé lorsqu'un milieu granulaire est soumis à un cisaillement.

Le début du 20<sup>ème</sup> siècle est assez pauvre en études sur les milieux granulaires. Mais un développement important des connaissances s'observe à partir de 1970 où des techniques de modélisation permettent d'étayer les observations expérimentales. Notons tout de même au milieu du 20<sup>ème</sup> siècle, les travaux du brigadier Ralph Alger Bagnold [8] : ses études sur les milieux granulaires lui ont été inspirées par des excursions militaires dans les déserts libyens. On retient de lui le nombre de Bagnold (Duran [2], page 66), permettant de distinguer le fluide simple où l'énergie est dissipée principalement par frottement visqueux du fluide granulaire où l'énergie est dissipée principalement par les chocs entre les grains (I.B.2.b ).

Au 20<sup>ème</sup> siècle, l'avènement de l'ordinateur a permis de mettre en œuvre diverses méthodes de simulation, dont celle des éléments distincts élaborée dans les années 70 par Cundall and Strack [9]. Depuis cette date, les méthodes de simulation sont de plus en plus utilisées, notamment grâce à l'augmentation constante de la puissance de calcul des ordinateurs. Nous présentons dans cette bibliographie les principales méthodes numériques ainsi que quelques études à titre illustratif (section Chapitre I).

Plus proche de notre sujet et de notre époque, nous noterons les expériences du James Franck Institute à Chicago sur la compaction par vibrations verticales, qui ont été entreprises au milieu des années 90 [10], travaux fondateurs sur la compaction des milieux granulaires. Les résultats permettent d'établir des analogies entre les milieux granulaires et les milieux vitreux. Ces analogies sont clairement mises en avant notamment dans les thèses de Pierre Philippe [11] et Philippe Ribière [12] effectuées à l'université de Rennes I. Ces études s'appuient sur une modélisation de type Monte-Carlo où un réarrangement semi-aléatoire (orienté par la gravité) des grains est implémenté après chaque sollicitation verticale (par choc). Notons que, contrairement aux verres, les milieux granulaires sont athermiques ( $k_b T \ll E = mgd$  où  $k_b$  est la constante de Boltzman,  $E$  est l'énergie caractéristique d'un grain,  $m$  sa masse,  $d$  son diamètre et  $g$  la constante de gravitation). Lors de la compaction par chocs verticaux, comme dans un verre, les temps de relaxation vers un état stable sont extrêmement longs. On note aussi une influence importante de la structure de l'empilement de départ. Celle-ci s'illustre en particulier par l'apparition de cycles d'hystérésis irréversibles lorsque l'intensité des sollicitations varie continument (III.B.1.b ).

Notre sujet, qui se focalise sur l'étude d'un milieu granulaire soumis à des vibrations horizontales, s'appuie donc sur une longue histoire de questionnement

scientifique et de connaissances développées au fil des siècles. Notre approche sera appliquée et nous nous appuierons sur les théories et outils techniques existants afin d'étudier les phénomènes rencontrés.

## I.B Caractérisation du milieu granulaire

Un matériau granulaire est un milieu divisé en de nombreuses entités élémentaires macroscopiques. Cette large définition englobe divers types de matériaux, comme les produits alimentaires conditionnés sous forme de grains (céréales, café en grain, certains aliments lyophilisés). Nous pouvons aussi citer les sables et graviers dans l'industrie du bâtiment. Parfois sont même considérés des éléments atypiques comme les rochers glacés des anneaux de saturne. Ainsi, du fait de leur diversité, nous avons besoin de critères de caractérisation d'un matériau granulaire.

Les paramètres permettant cette caractérisation peuvent être considérés à l'échelle de chaque grain. Dans ce cas, on définit la morphologie des grains, le matériau qui les constitue, la taille et la distribution granulométrique des grains, leur masse volumique. Eventuellement, pour aller plus loin ou en vue de faire des modélisations, on peut définir des grandeurs mécaniques, comme le coefficient de restitution lors d'un choc entre deux grains, la rigidité des grains, ou encore le coefficient de friction inter-grains.

On peut aussi considérer le milieu granulaire comme un milieu continu. Dans ce cas, nous pouvons relever la densité moyenne ou locale du milieu granulaire, l'angle de talus à l'équilibre, évaluer le tenseur des contraintes moyen, ou calculer une « température granulaire » inspirée de la physique statistique et caractérisant le mouvement relatif des grains. Les propriétés des grains et du milieu continu équivalent sont fortement dépendantes : la densité peut par exemple être influencée par la morphologie des grains ou leur distribution granulométrique.

Dans ce chapitre, nous nous attacherons tout d'abord à présenter les principaux paramètres décrivant les propriétés géométriques d'un milieu granulaire. Puis nous en présenterons certaines propriétés mécaniques : l'angle de talus, le coefficient de friction macroscopique, la définition du tenseur des contraintes propre au milieu granulaire, l'effet Janssen.

## I.B.1 Caractérisation géométrique

### I.B.1.a Morphologie des grains

Nous retenons deux critères permettant de caractériser la morphologie des grains, l'arrondi<sup>1</sup> et la sphéricité. Ces échelles ont été introduites par Wadell [13] pour caractériser des particules de quartz. L'arrondi  $\xi$  s'exprime comme le rapport entre le rayon de courbure  $r_c$  moyen des arêtes par le rayon  $R$  de la plus grande sphère inscrite :

$$\xi = \frac{\iint r_c \cdot dS}{A_g R} \quad (I-1)$$

Où  $A_g$  désigne l'aire de la surface du grain  $S_g$ . Nous utiliserons aussi une caractérisation, élaborée par Powers [14], donnant une illustration de la notion d'arrondi sous forme de photos. Comme indiqué Tableau 1 et exposé Figure 4, un arrondi proche de 1 indique que la surface de la particule présente des rayons de courbure relativement grands (vis-à-vis de la taille du grain) et un arrondi proche de 0 indique des angulosités très élevées.

Un paramètre, l'indice de sphéricité  $\Psi$ , permet de caractériser la sphéricité. On le définit comme le rapport de la surface d'une sphère de même volume que le grain sur la surface effective du grain (Wadell [13]) :

$$\Psi = \frac{\pi^{1/3} (6V_g)^{2/3}}{A_g} \quad (I-2)$$

Où  $V_g$  est le volume du grain. Une sphéricité proche de 1 indique une forte sphéricité (par exemple des billes ou des pommes) et une sphéricité proche de 0 une faible sphéricité (bâtonnets ou lamelles).

---

<sup>1</sup> « roundness » en anglais

<sup>2</sup> Angle que forme les grains avec l'horizontale lors de la rotation du tambour

Terme	Intervalle d'arrondi	Arrondi moyen
Très anguleux	0.12-0.17	0.14
Anguleux	0.17-0.25	0.21
Peu Anguleux	0.25-0.35	0.30
Peu arrondi	0.35-0.49	0.41
Arrondi	0.49-0.70	0.59
Bien arrondi	0.70-1.00	0.84

Tableau 1. Echelle des arrondis (Powers [14])

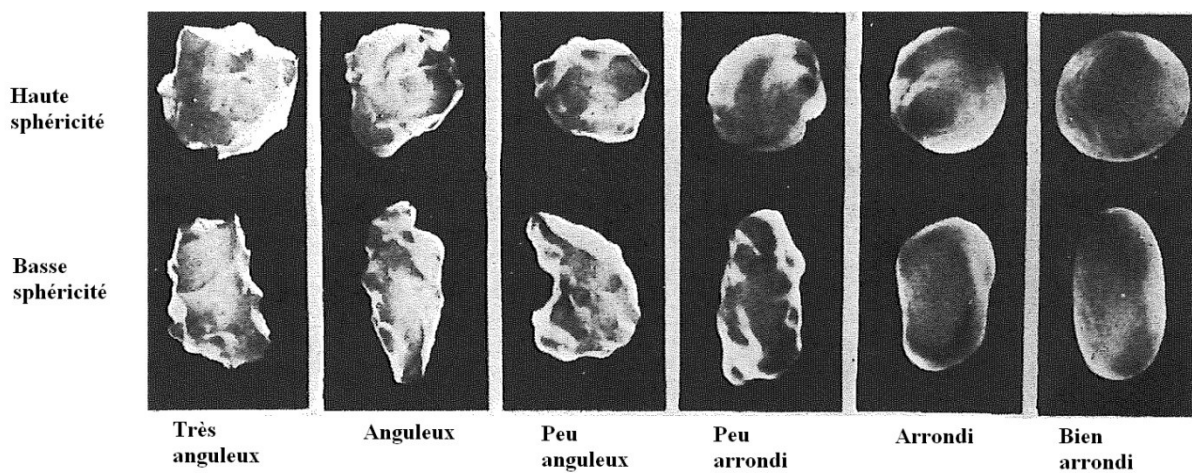


Figure 4. Simplification de Powers [14] permettant d'évaluer l'arrondi de grains

### I.B.1.b Sur la notion de densité

Le volume total d'un milieu granulaire est constitué de pores et de grains. Si l'on appelle  $V_{total}$  le volume apparent,  $V_{solide}$  le volume occupé par les grains et  $V_p$  le volume poreux ( $V_{total}=V_p+V_{solide}$ ), on définit la compacité  $C$  comme le volume occupé par les grains que divise le volume total :

$$C = \frac{V_{solide}}{V_{total}} \quad (I-3)$$

C'est cette valeur que nous considérerons généralement pour mesurer la densité du milieu granulaire. Notons que d'autres critères de mesure sont parfois retenus. La porosité  $\varepsilon$ , par exemple, est définie comme le complémentaire à 1 de la densité :



$$\varepsilon = 1 - C \quad (I-4)$$

On peut aussi mentionner l'indice des vides  $e$  défini comme le rapport entre le volume poreux et le volume solide,  $e = \frac{V_p}{V_{solide}}$ . On en déduit les relations suivantes :

$$\varepsilon = \frac{V_p}{V_{total}}, \quad e = \frac{1-C}{C}, \quad \varepsilon = e.C.$$

### *Densité d'un empilement monodisperse de sphères :*

Un empilement monodisperse de sphères est un amas de sphères de même taille. Pour des sphères, la densité des empilements désordonnés ayant atteint leur état d'équilibre sous pesanteur reste comprise entre deux valeurs limites :

- La densité de « l'empilement aléatoire lâche » ou « random loose packing » (RLP) :  $C_{RLP} \approx 55\%$  [15]. Un tel empilement s'obtient par exemple en laissant sédimenter les grains dans un fluide visqueux.
- La densité de l'empilement désordonné le plus compact, « l'empilement aléatoire dense » ou « random close packing » (RCP) de densité :  $C_{RCP} \approx 64\%$  [16][17]. Un tel empilement peut être construit par pluviation, c'est-à-dire en opérant une sédimentation couche par couche (en laissant un état d'équilibre s'installer après chaque couche déposée), dans l'air ou le vide.

Si l'on trouve une densité supérieure à celle de l'empilement aléatoire dense, l'empilement est au moins partiellement cristallisé. La valeur maximale de la densité à 3 dimensions est  $C_{max} = 74\%$  (91 % à 2 dimensions) ; elle correspond aux cristaux « cubique à faces centrées » (cfc) et « hexagonal compact » (hc). On notera que le nombre de coordination, c'est-à-dire le nombre moyen de voisins de chaque sphère varie entre 6 pour les milieux peu denses (RLP) et 12 pour les milieux très denses (cfc, hc).

### *Densité d'un empilement de sphères polydisperses :*

Pour des empilements polydisperses de sphères, la densité minimale est toujours supérieure à  $C_{RLP}$ . Certains algorithmes permettent de déterminer leur densité maximale de manière numérique (Al-Raoush et al. [18] et Jia et al. [19]). Il faut alors minimiser le

volume de l'espace poreux entre les grains et positionner ces derniers un à un. La structure et les densités obtenues par de tels algorithmes sont proches de celles mesurées dans la réalité, par exemple à l'aide d'un tomographe à rayons X.

### *Particules de forme quelconque :*

Pour des particules de forme quelconque (sans imaginer des particules trop tortueuses ou présentant beaucoup de concavités), le modèle de De Larrard [1] permet de définir une densité virtuelle atteinte pour un mélange de grains avec un maximum de serrage. Notons que ce modèle est décrit et utilisé par J. P. Guillemin [20], dans son travail sur les suspensions concentrées.

## I.B.2 Caractérisation mécanique

### I.B.2.a Statique

#### I.B.2.a.i Angle de talus/Coefficient de friction

Une propriété intrinsèque d'un milieu granulaire est l'angle de talus à l'équilibre  $\theta$ . Notons que l'angle de talus formé par un milieu granulaire lors d'une mise en tas dépend fortement de la distribution granulométrique et du coefficient de friction inter-grains. La loi de Coulomb permet de définir le coefficient de friction statique équivalent  $\mu_s$  :

$$\mu_s \equiv \tan \theta \quad (I-5)$$

Notons que ce coefficient de friction équivalent n'est généralement pas égal au coefficient de friction inter-grains  $\mu_{g/g}$  que l'on peut considérer dans certaines simulations. Le critère de Coulomb au niveau des grains indique qu'il n'y a aucun glissement si :

$$F_s < \mu_{g/g} F_n \quad (I-6)$$

Sinon, il y a glissement et  $F_s = \mu_{g/g} F_n$  où  $F_n$  et  $F_s$  désignent les forces normales et tangentielles s'exerçant sur les grains. En effet, l'analogie ne peut être établie et  $\mu_s \neq \mu_{g/g}$  puisque pour des mêmes coefficients de friction inter-grains  $\mu_{g/g}$ , on peut

obtenir des coefficients de friction équivalents  $\mu_s$  différents par exemple en changeant la distribution granulométrique [21]. Néanmoins, pour une morphologie de grains et une distribution granulométrique donnée, il apparaît une variation de  $\mu_s$  dans le même sens que  $\mu_{g/g}$  [22]. Augmenter la friction inter-grains conduit à augmenter l'angle de talus. Nous étudierons plus en détails la relation entre  $\mu_{g/g}$  et  $\mu_s$  dans nos travaux à l'aide de notre outil de modélisation numérique (section VI.A.3 ).

### I.B .2.a.ii Définition de la notion de tenseur des contraintes pour un milieu granulaire

Dans cette section, nous développons la notion de contrainte dans un milieu granulaire (en ayant préalablement rappelé sa définition pour un milieu continu). L'application pratique sera la mesure des contraintes s'exerçant dans le milieu granulaire simulé. Ceci permettra de comprendre plus finement le comportement des grains soumis à une sollicitation. En particulier, on pourra juger de la stabilité locale d'un milieu granulaire par la distance entre la droite de Coulomb et le cercle de Mohr. Plus cette distance est proche de 0, plus les possibilités de glissement sont importantes. On peut penser que, si le milieu est instable, un glissement est possible et ainsi, les grains se déplacent par gravité vers le bas de l'empilement augmentant ainsi la densité.

On peut partir de notions de mécanique de base pour définir la notion de contrainte propre à un grain ou un ensemble de grains. Nous récapitulons ici les principales formules utilisées dont les démonstrations peuvent se retrouver pour partie dans un livre classique de mécanique des milieux continus, celles propres aux milieux granulaires se retrouveront en annexe.

#### ♦ Rappels classiques de mécanique des milieux continus et notations

On définit une contrainte de la façon suivante : soit  $dA$  l'aire d'un élément de surface  $dS$  de normale  $\vec{n}$  dans un milieu continu. On appelle contrainte la force moyenne par unité de surface qui s'exerce sur  $dS$ , soit :

$$\vec{T}^{(\vec{n})} \equiv \frac{d\vec{F}}{dA} \quad (\text{I-7})$$

où  $d\vec{F}$  est la force totale s'exerçant sur  $dS$ . Cette contrainte s'exprime en Pascal, elle est homogène à une pression.

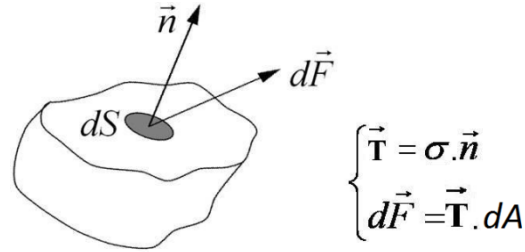


Figure 5. Définition classique d'une contrainte et de la force élémentaire s'exerçant sur un élément de surface  $dS$  d'aire  $dA$

La contrainte  $\vec{T}^{(\vec{n})}$  dépend de la localisation dans le matériau et de l'orientation de la normale  $\vec{n}$ . Cette contrainte peut s'exprimer en fonction des contraintes élémentaires  $\vec{T}^{(\vec{e}_1)}, \vec{T}^{(\vec{e}_2)}, \vec{T}^{(\vec{e}_3)}$  s'exerçant sur trois plans perpendiculaires. On définit le tenseur des contraintes  $\sigma$  de la façon suivante (Théorème fondamental de Cauchy + Figure 6) :

$$\sigma_{ij} \equiv [\vec{T}^{(\vec{e}_1)}, \vec{T}^{(\vec{e}_2)}, \vec{T}^{(\vec{e}_3)}] \quad (\text{I-8})$$

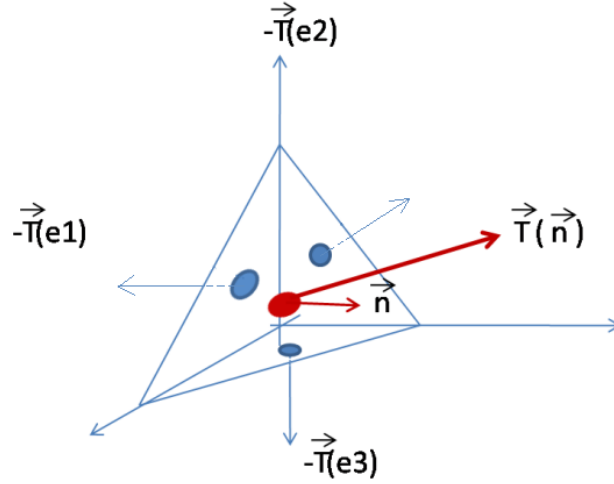


Figure 6. Tétraèdre de Cauchy et contraintes s'exerçant sur trois plans perpendiculaires

Le tenseur des contraintes  $\sigma$  permet de calculer la contrainte s'exerçant en un point  $M$  de  $\mathcal{R}^3$  de normale  $\vec{n}$  (Figure 5) :

$$\vec{T}^{(\vec{n})} = \sigma \cdot \vec{n} \quad (\text{I-9})$$

On considère un milieu à l'équilibre soumis à des forces volumiques de densité  $\vec{f}$  et à des forces de surface  $d\vec{F} = \vec{T}^{(\vec{n})} dA = \sigma \cdot \vec{n} \cdot dA$  où  $dA$  est l'aire d'un élément de surface  $dS$ . A l'équilibre, on a l'équation locale :

$$\sigma_{ji,j} + f_i = 0 \quad (\text{I-10})$$

où  $\sigma_{ji,j}$  est la dérivée partielle de  $\sigma_{ji}$  par rapport à  $x_j$ . On a aussi la propriété de symétrie, déduite de la nullité de la somme des moments à l'équilibre :

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ji} \quad (\text{I-11})$$



#### Relations propres aux milieux granulaires

Nous présentons ici les notions théoriques sous-jacentes [23],[24],[25], au tenseur des contraintes qui peut être calculé grâce à des simulations numériques. Supposons que le champ matriciel  $\sigma$  soit défini dans l'ensemble du milieu granulaire (et en particulier au niveau de chaque grain) et qu'il s'agisse d'un champ matriciel continu et dérivable. Une

astuce numérique consiste à calculer un tenseur des contraintes pour chaque particule  $p$  du milieu granulaire (ANNEXE I.A).

On trouve la relation suivante qui caractérise « une contrainte propre à un grain » :

$$\overline{\sigma}_{ij}^{(p)} = -\frac{1}{V^{(p)}} \sum_{c=1}^{N_c} x_i^{(c)} F_j^{(c)} \quad (\text{I-12})$$

Où  $N_c$  désigne le nombre de contact,  $F_j^{(c)}$  la  $j^{\text{ème}}$  composante des forces s'exerçant au point de contact  $c$ , et  $x_i^{(c)}$  la  $i^{\text{ème}}$  coordonnée du point de contact.

Le signe - a été introduit pour respecter la convention :

- Compression  $\Rightarrow$  trace  $\sigma_{ij} < 0$
- Extension  $\Rightarrow$  trace  $\sigma_{ij} > 0$

On utilise en simulation numérique l'expression équivalente (ANNEXE I.A) :

$$\overline{\sigma}_{ij}^{(p)} = -\frac{1}{V^{(p)}} \sum_{c=1}^{N_c} |x_i^{(c)} - x_i^{(p)}| n_i^{(c)} F_j^{(c)} \quad (\text{I-13})$$

Où  $n_i^{(c)}$  est la  $i^{\text{ème}}$  composante du vecteur normal à la surface de la particule au point de contact  $c$  et  $x_i^{(p)}$  la  $i^{\text{ème}}$  composante de la coordonnée du centre de la particule  $p$ . On retrouve ensuite le tenseur des contraintes propre à un volume  $V$  contenant un ensemble de particules (ANNEXE I.A) :

$$\langle \overline{\sigma}_{ij} \rangle_V = \frac{\sum_p V_p \overline{\sigma}_{ij}^{(p)}}{V} \quad (\text{I-14})$$

Où  $p$  désigne l'indice des particules contenues dans  $V$ , et  $V_p$  le volume de la particule contenue dans  $V$  (pas nécessairement le volume total de la particule).

On peut remarquer que si l'on développe l'équation (I-14) en utilisant l'équation (I-13), on obtient une formule appelée formule de Weber dans la littérature [23]

$$\langle \overline{\sigma}_{ij} \rangle_V = \frac{1}{V} \sum_{N_{c,p}} |x_i^{(c)} - x_i^{(p)}| n_i^{(c,p)} F_j^{(c)} \quad (\text{I-15})$$

I.B .2.a.iii Cercle de Mohr dans une géométrie 2D

Nous rappelons ici des relations classiques de mécanique des sols qui seront nécessaires à la compréhension de la section VI.A.3 . Cette présentation pourra paraître un peu trop exhaustive et classique pour le spécialiste. Mais nous espérons qu'elle permettra d'éclairer le non initié.

Plaçons-nous dans le repère orthonormé  $(Oxyz)$  et considérons le cas d'une contrainte plane. Le tenseur des contraintes peut se mettre sous la forme :

$$\sigma_{xy} = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & 0 \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & 0 \\ \tau_{yx} & \sigma_y & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (I-16)$$

Et à l'équilibre, puisque le tenseur des contraintes est symétrique :

$$\sigma_{xy} = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & 0 \\ \tau_{xy} & \sigma_y & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (I-17)$$

En un point  $M$  donné du milieu, considérons un élément de surface dont la normale  $\vec{n}$  incluse dans le plan  $(Oxy)$  for un angle  $\theta$  avec l'axe des abscisses  $(Ox)$ . Les vecteurs contraintes en ce point peuvent se décomposer sous la forme suivante :

$$\vec{T}_\alpha = \begin{pmatrix} T_x^{(\alpha)} \\ T_y^{(\alpha)} \end{pmatrix} \quad (I-18)$$

où  $\alpha = x, y, \vec{n}$

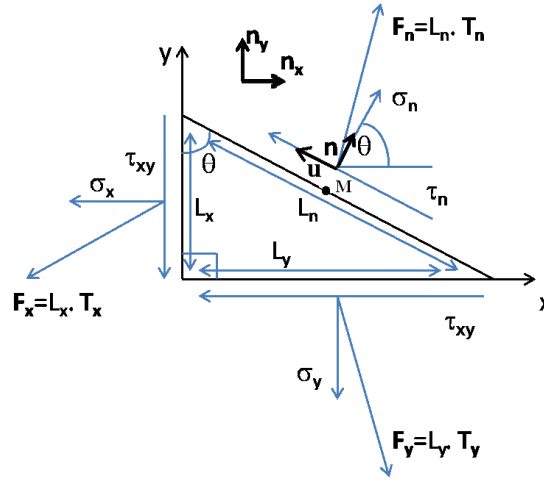


Figure 7. Représentation des contraintes dans un espace 2D (profondeur unité selon  $\vec{Oz}$ )

En utilisant le tenseur des contraintes et ses propriétés de symétrie, on trouve les contraintes s'exerçant en  $M$  sur un élément de surface orthogonal à  $(Ox)$  (respectivement à  $(Oy)$ ) :

$$\vec{T}_x = \begin{pmatrix} -\sigma_x \\ -\tau_{xy} \end{pmatrix} \quad (I-19)$$

$$\vec{T}_y = \begin{pmatrix} -\tau_{xy} \\ -\sigma_y \end{pmatrix} \quad (I-20)$$

Par la relation d'équilibre des forces, on peut en déduire les contraintes s'exerçant en  $M$  sur l'élément de surface de normale  $\vec{n}$  (ANNEXE I.B) :

$$\begin{cases} \sigma_n = \frac{1}{2}(\sigma_x + \sigma_y) + \frac{1}{2}(\sigma_x - \sigma_y) \cdot \cos 2\theta + \tau_{xy} \cdot \sin 2\theta \\ \tau_n = -\frac{(\sigma_x - \sigma_y)}{2} \cdot \sin 2\theta + \tau_{xy} \cdot \cos 2\theta \end{cases} \quad (I-21)$$

La formule (I-21) nous permet d'obtenir les composantes normale  $\sigma_n$  et tangentielle  $\tau_n$  du vecteur contrainte  $\vec{T}_n$ . Dans un plan quelconque de normale  $\vec{n}$ , on a donc :



$$\vec{T}_n = \sigma_n \cdot \vec{n} + \tau_n \cdot \vec{u} \text{ avec } \vec{n} \cdot \vec{u} = 0 \text{ et } \|\vec{n}\| = \|\vec{u}\| = 1 \quad (\text{I-22})$$

On peut déduire de la formule (I-21) qu'il existe deux plans où la composante tangentielle des contraintes est nulle ( $\tau_n = 0$ ). En effet, l'identité

$$\tau_n = -\frac{(\sigma_x - \sigma_y)}{2} \cdot \sin 2\theta + \tau_{xy} \cdot \cos 2\theta \text{ implique :}$$

$$\tan 2\theta_p = \frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y} \quad (\text{I-23})$$

Les solutions de l'équation ci-dessus sont :

$$\theta_{p_k} = \text{Arctg}\left(\frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y}\right) / 2 + \frac{k\pi}{2} \quad (\text{I-24})$$

Elles correspondent aux orientations où  $\tau_n$  est nulle. On peut obtenir plus d'information en réarrangeant l'équation (I-21) :

$$\begin{cases} [\sigma_n - \frac{1}{2}(\sigma_x + \sigma_y)]^2 = \frac{1}{4}(\sigma_x - \sigma_y)^2 \cdot \cos^2 2\theta + \tau_{xy}^2 \cdot \sin^2 2\theta + (\sigma_x - \sigma_y) \cdot \cos 2\theta \cdot \tau_{xy} \cdot \sin 2\theta \\ \tau_n^2 = \frac{1}{4}(\sigma_x - \sigma_y)^2 \cdot \sin^2 2\theta + \tau_{xy}^2 \cdot \cos^2 2\theta - (\sigma_x - \sigma_y) \cdot \sin 2\theta \cdot \tau_{xy} \cdot \cos 2\theta \end{cases} \quad (\text{I-25})$$

On définit :

$$\begin{cases} \sigma_{moyen} \equiv \frac{(\sigma_x + \sigma_y)}{2} \\ R \equiv \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} \end{cases} \quad (\text{I-26})$$

En additionnant les deux termes de l'équation (I-25), on obtient finalement :

$$(\sigma_n - \sigma_{moyen})^2 + \tau_n^2 = R^2 \quad (\text{I-27})$$

C'est-à-dire que les contraintes  $\sigma_n$ ,  $\tau_n$  décrivent un cercle de centre  $[\sigma_{moyen}, 0]$  et de rayon  $R$ . Lorsque l'angle  $\theta$  varie, la contrainte normale évolue entre les contraintes principales  $\sigma_1$  et  $\sigma_2$  définies par :

$$\begin{cases} \sigma_1 = \sigma_{moyen} + R \\ \sigma_2 = \sigma_{moyen} - R \end{cases} \quad (I-28)$$

Notons que les contraintes  $\vec{T}_1 = \begin{pmatrix} \sigma_1 \\ 0 \end{pmatrix}$  et  $\vec{T}_2 = \begin{pmatrix} \sigma_2 \\ 0 \end{pmatrix}$  correspondent aux contraintes exercées dans les plans sur lesquelles on a effectué les rotations d'angle :

$$\begin{cases} \theta_{p_1} = \text{Arctg}\left(\frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y}\right)/2 \\ \theta_{p_2} = \text{Arctg}\left(\frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y}\right)/2 + \frac{\pi}{2} \end{cases} \quad (k=0 \text{ ou } k=1 \text{ dans l'équation (I-24)}) \quad (I-29)$$

On peut maintenant réécrire les contraintes en faisant un changement de repère à partir des plans où les contraintes tangentielles sont nulles. On obtiendra alors les deux valeurs de contraintes  $\sigma_1$  et  $\sigma_2$  définies précédemment. Dans l'équation (I-21), on effectue alors le changement de variable :

$$\begin{cases} \sigma_x \rightarrow \sigma_1 \\ \sigma_y \rightarrow \sigma_2 \\ \tau_{xy} \rightarrow 0 \\ \theta \rightarrow \theta' = \theta + \theta_{p_2} \end{cases} \quad (I-30)$$

La Figure 8 permet de visualiser toutes les notations introduites et ce principe de changement de repère en considérant l'espace des contraintes. Cette représentation est appelée du nom de son inventeur, représentation sous forme de cercle de Mohr. On peut maintenant réécrire la contrainte moyenne et le rayon du cercle de Mohr en fonction des contraintes principales  $\sigma_1$  et  $\sigma_2$  :

$$\begin{cases} \sigma_{moyen} = \frac{(\sigma_1 + \sigma_2)}{2} \\ R = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \end{cases} \quad (I-31)$$

On en déduit les expressions finales des contraintes normale et tangentielle sur un élément de surface en fonction de l'angle  $\theta'$  avec le plan de la contrainte principale  $\sigma_1$  :

$$\begin{cases} \sigma_n = \sigma_{moyen} + R \cdot \cos 2\theta' \\ \tau_n = R \cdot \sin 2\theta' \end{cases} \quad (I-32)$$

Remarquons que faire une rotation d'un angle  $\alpha$  dans l'espace géométrique correspond à une rotation de  $2\alpha$  dans l'espace des contraintes.

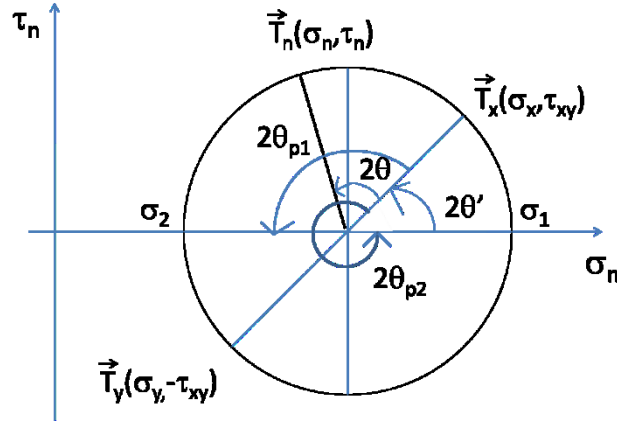


Figure 8. Représentation des contraintes sous forme de cercle de Mohr

#### I.B.2.a.iv Critère de Mohr-Coulomb

Nous allons maintenant nous appuyer sur les définitions précédentes pour définir des critères de stabilité du milieu granulaire. C'est ce que permet de déterminer le critère de Mohr-Coulomb que nous allons présenter.

Soient deux solides en contact sans cohésion. On rappelle que le coefficient de friction  $\mu_s$  est le rapport entre la contrainte tangentielle  $\tau$  et normale  $\sigma$  à la limite du glissement (Figure 9). La droite de Coulomb est définie par  $\tau = \mu_s \sigma$  dans l'espace des contraintes  $[\sigma_n, \tau_n]$ . On appelle cône de Coulomb l'espace compris entre les droites de coefficient  $\mu\sigma$  et  $-\mu\sigma$ . Trois situations sont possibles :

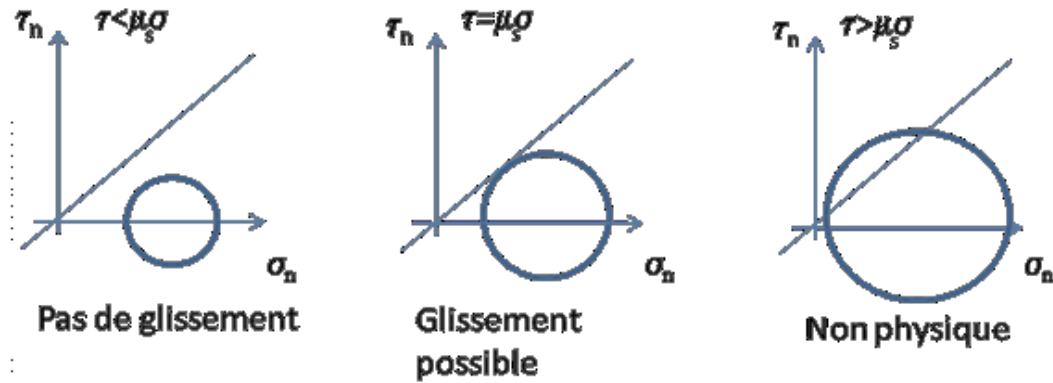


Figure 9. Critère de Mohr-Coulomb en fonction de l'angle de friction statique  $\mu_s$

- Le cercle de Mohr est strictement à l'intérieur du cône de Coulomb : un glissement n'est possible dans aucun plan.
- Le cercle de Mohr est tangent au cône de Coulomb : un glissement est possible dans le plan tangent.
- Le cercle de Mohr coupe le cône de Coulomb : dans ce cas, il existerait des plans où  $\tau > \mu_s \sigma$  : cette situation n'est pas physique. Le glissement a déjà eu lieu et a relaxé les contraintes.

A partir du critère de Coulomb sont établis les états critiques de Rankine déterminant la possibilité d'effondrement (état actif) ou d'expansion (état passif) d'un milieu granulaire soumis à une contrainte verticale due au poids des grains et tangentielle due à la pression exercée par les parois [26].

Remarquons que d'autres critères de glissement auraient pu être choisis. Par exemple, les critères de Tresca  $|\sigma_1 - \sigma_2| \leq Re$  et de Von Mises  $\sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - \sigma_1 \sigma_2} \leq Re$  où  $Re$  est la limite élastique. Nous avons évité de les choisir, ces critères ne paraissant pas classiquement utilisés dans la littérature exposant des études sur les milieux granulaires.

#### I.B .2.a.v Le modèle de Janssen

Nous présentons ici le modèle de Janssen permettant de calculer la pression dans un milieu granulaire statique, en fonction de la profondeur dans l'empilement. La géométrie considérée ici est cylindrique. Notons que pour toute autre géométrie (parallélépipédique par exemple), la résolution conduirait au même type de résultat en introduisant des facteurs de forme supplémentaires.

Ce modèle nécessite d'admettre certaines hypothèses difficiles à justifier. Néanmoins, il rend assez bien compte de la distribution réelle des contraintes. On considère un tube cylindrique de diamètre  $D$  rempli d'un milieu granulaire de masse volumique apparente  $\rho$  (Figure 10). Ce modèle permet de calculer la contrainte qui s'exerce dans le récipient en fonction de la profondeur (démonstration ANNEXE C) :

$$\sigma_{zz} = \rho g \lambda (1 - \exp(\frac{-z}{\lambda})) \quad (I-33)$$

Pour des valeurs typiques correspondant aux matériaux que nous utilisons, on prendra  $\mu \approx 0.5$  et  $K \approx 1$ , on obtient ainsi  $\lambda = 2$ .

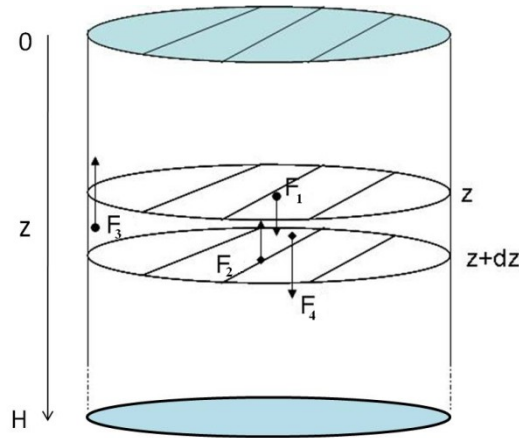


Figure 10. Représentation schématique des notations utilisées pour calculer l'équation de Janssen

## I.B.2.b Dynamique

### I.B.2.b.i Le phénomène de ségrégation

Définissons de manière plus précise la notion de ségrégation : la ségrégation désigne le phénomène par lequel un groupe de grains, d'abord mêlés à d'autres, s'en séparent ou en restent séparés. L'origine du phénomène de ségrégation vient du fait que des particules ayant des propriétés différentes (masse, volume, rugosité, ...) se comportent de manière différente à l'intérieur de l'empilement de grains. Le mélangeage apparaît comme l'inverse de la ségrégation : dans ce cas, des groupes de grains séparés sont mêlés à d'autres de façon individuelle, ou en partie collective. La notion de groupe de grains conduisant à une ségrégation peut être fondée sur une propriété commune aux grains :

densité, taille, forme, coefficient de friction, rugosité, rigidité (...), ou une combinaison de ces diverses propriétés. Notons que l'on peut quantifier la ségrégation à l'aide d'outils statistiques.

Lacey [26] (1954) a introduit deux grandeurs pour caractériser un mélange réel considéré (pas d'exposant) par rapport à un mélange qui serait aléatoire (indice \*) ou totalement ségrégué (indice °). Une intensité de ségrégation  $S$  et un indice de mélange  $M$  ([27], thèse de J.-M. Missiaen) peuvent être définis en fonction de l'écart type  $\sigma_N$  sur une variable expérimentale  $x$  obtenue sur  $N$  tirages :

$$S = \frac{\sigma_N^2 - \sigma_N^{*2}}{\sigma_N^2 - \sigma_N^{°2}} \quad (\text{I-34})$$

$$M = \frac{\sigma_N^2}{\sigma_N^{*2}} \quad (\text{I-35})$$

$S$  varie de 0 pour un mélange totalement homogène à 1 pour un mélange totalement ségrégué.  $M$  varie de 0 pour un mélange totalement ségrégué à 1 pour un mélange totalement homogène. Remarquons que dans les faits, l'indice de ségrégation  $S$  dépend du nombre de grains  $N$  considéré dans la mesure ( $S=S(N)$ ) et n'est pas exactement une propriété intrinsèque du mélange considéré. On peut prouver que  $S$  varie de  $\frac{1}{\sqrt{N}}$  pour un mélange parfaitement homogène à 1 pour une ségrégation totale [28]. Il faut donc comparer l'échelle d'observation ( $N$ , nombre de particules dans l'échantillon) et l'échelle de ségrégation, dont l'étendue peut être évaluée en nombre de particules dans la zone ségréguée ( $E=N_p$ ). Rappelons que la qualité du mélange augmente si  $E$  et  $S$  diminuent.

Pour avoir ségrégation, il suffit que le milieu granulaire soit en mouvement. Presque tous les types de sollicitation induisant un mouvement de grains peuvent entraîner de la ségrégation :

- Un cisaillement plan
- Des vibrations (verticales/horizontales)
- L'envolement ou la chute de grains dans le fluide/gaz environnant
- Un obstacle imposé aux grains lors de leurs parcours
- ....

Si l'on ajoute qu'il peut y avoir des combinaisons de ces mouvements, on se rend compte de l'extrême complexité du problème. On comprend aussi pourquoi l'on ne peut expliquer le phénomène de ségrégation d'une manière générale. Ainsi, nous illustrerons ce problème par quelques exemples.

### ◆ Ecoulements dans un tambour tournant

Nous ne détaillerons pas ici l'influence de la taille des grains, de la vitesse de rotation, du diamètre et de la hauteur du cylindre mais noterons les deux principaux phénomènes visualisés dans les écoulements en tambour tournant [29]. Dans l'expérience du tambour tournant, un cylindre contenant un milieu granulaire est mis en rotation. Le paramètre influençant le plus un tri des grains est la taille des particules [30]. Quand le tambour est mis en rotation, deux phénomènes distincts de ségrégation s'opèrent (Figure 11, [29]).

Premièrement, une ségrégation radiale dans le plan perpendiculaire à l'axe de rotation du cylindre, s'installe en quelques tours de tambour. Celle-ci a pour origine une différence de taille entre les particules générant des longueurs de chute différentes sur le tas en mouvement. La surface du milieu granulaire est plus « lisse » pour les gros grains qui peuvent rouler facilement et ont tendance à aller plus loin. Les petits grains s'arrêtent plus vite, tombent dans les espaces interstitiels et se retrouvent au milieu de l'empilement. Enfin, après plusieurs centaines, voire milliers de tours de tambour, on peut observer une ségrégation axiale. Celle-ci a pour origine une différence de coefficient de friction et d'angle de talus dynamique<sup>2</sup> entre les grains. Cette ségrégation reste mal comprise et est encore à l'origine de nombreuses recherches.

---

<sup>2</sup> Angle que forme les grains avec l'horizontale lors de la rotation du tambour

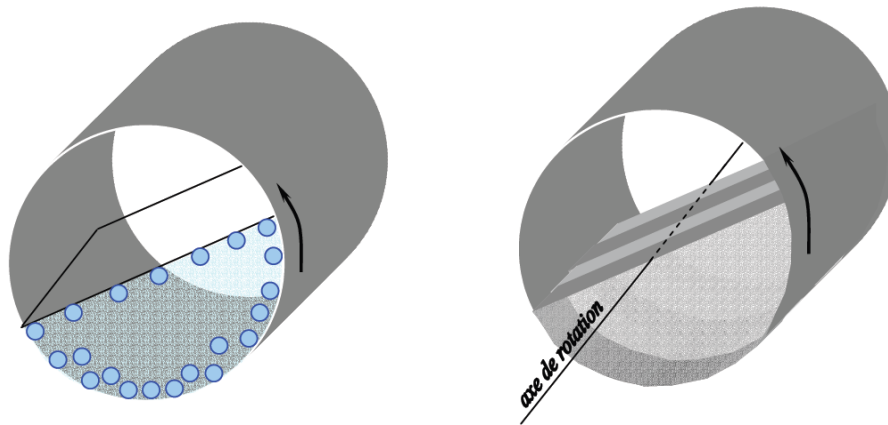


Figure 11. Schéma illustratif. Ségrégation radiale : s'opère à partir de quelques tours de tambour. Ségrégation axiale : existe s'il y a une différence de coefficient de friction entre les particules, peut nécessiter des milliers de tours de tambour. Image extraite de [29]

◆ Silo : ségrégation par déversement en tas

Lorsque des grains se déversent d'un silo ou d'un sablier, on peut observer dans le tas formé un cœur de grains fins et de gros grains aux bords de l'empilement ([31], Figure 12). On peut expliquer ce phénomène de la manière suivante : pour les gros grains, le milieu apparaît plus lisse, ils ont tendance à glisser (rouler) plus facilement et aller plus loin [32].

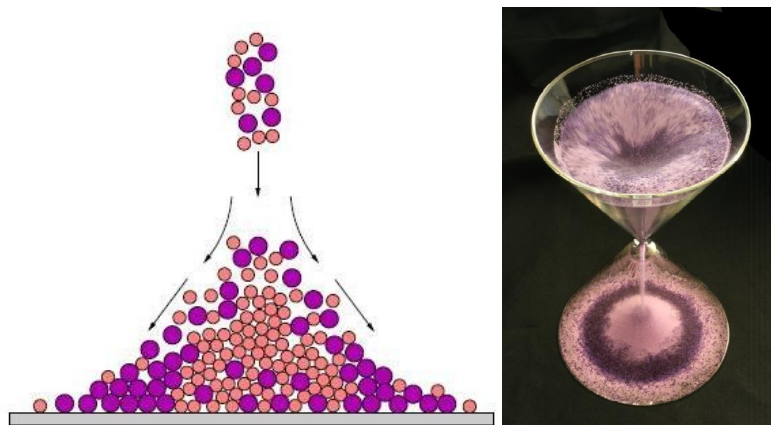


Figure 12. Images extraites de [31]. A gauche : illustration des phénomènes s'opérant lors d'un déversement à tas. A droite : photographie de la ségrégation observée dans un sablier (Photographie Stéphane Bourlès, GMCM)



Néanmoins, la réalité de ce phénomène de ségrégation par déversement est plus complexe comme nous le constatons sur la Figure 12 présentant la ségrégation issue d'un écoulement dans un sablier. On observe ici une troisième zone derrière la couche de gros grains où une majorité de grains de petite taille se concentre. Les petits grains de cette zone externe ont probablement subi un mode de transport différent. Ils ont été entraînés par le mouvement ascendant de l'air dans le sablier, ce qui leur a permis d'atteindre cette région plus éloignée. De manière plus rigoureuse, supposons que les grains de rayons  $r_g$ , de masse volumique  $\rho$  et de vitesses  $\vec{v}$  soient soumis à une force d'entraînement  $\vec{F}_e = 6\pi\eta r_g \vec{u}(t)$ , où  $\vec{u}$  est la vitesse de l'air qui dépend du temps et  $\eta$  la viscosité de l'air.

On obtient par l'équation de la dynamique où le vecteur  $\vec{a}$  désigne l'accélération de la particule :

$$-6\pi\eta r_g (\vec{v} - \vec{u}(t)) + \frac{4}{3}\pi\rho g r_g^3 = \frac{4}{3}\pi\rho r_g^3 \vec{a} \quad (\text{I-36})$$

Et si l'on ne regarde que la composante des forces engendrant un déplacement horizontal des grains :

$$6\pi\eta r_g (u_x(t) - v_x) = \frac{4}{3}\pi\rho r_g^3 a_x \quad (\text{I-37})$$

Soit :

$$a_x = \frac{9\eta(u_x(t) - v_x)}{2\rho r_g^2} \quad (\text{I-38})$$

L'accélération horizontale des grains est inversement proportionnelle au carré du rayon. Si la vitesse d'entraînement est supérieure à la vitesse de déplacement ( $u_x > v_x$ ), ce sont les grains les plus petits qui iront le plus loin. Remarquons qu'ici, nous supposons que l'air entraîne les grains vers la périphérie. Cette considération n'est pas triviale mais elle permet d'expliquer les phénomènes rencontrés.



#### Ségrégation par vibrations verticales

Un des effets des vibrations est appelé « Brazil Nut Effect » en référence à la ségrégation entre des noix de petites tailles, et des noix de taille plus importantes appelées

noix du Brésil. Le « Brazil Nut Effect » (BNE) fait référence au fait que soumises à une agitation, de grosses noix du Brésil, mélangées à d'autres noix plus petites, ont tendance à remonter. Dans un milieu granulaire quelconque, le BNE fera référence au fait que, soumis à une vibration, les grains de taille plus importante ont tendance à remonter. On explique ce phénomène par la percolation des petits grains à travers les gros grains : les petits grains peuvent se glisser sous les gros grains et tombent vers le fond de l'empilement. Ce phénomène s'observe de manière expérimentale [32] et numérique [33].

On parle de « Reverse Brazil Nut Effect » (RBNE) lorsque les grains les plus gros tombent vers le fond de l'empilement. On observe ce phénomène lorsque la densité des gros grains est beaucoup plus grande que celle des petits et que certaines conditions sur les coefficients de friction sont remplies. Par exemple, dans [34], des grains de 2,4 mm de diamètre et de densité 8,4 sont mélangés à de plus petits grains de 1,4 mm et de densité 2,5 puis soumis à des vibrations verticales. Pendant les 25 premières heures de vibration, on retrouve les gros grains au sommet de l'empilement (BNE). Ensuite, du fait d'un changement de coefficient de friction dû à l'usure des grains, la tendance s'inverse et ce sont les petits grains qui se retrouvent au sommet de l'empilement (RBNE). Les propriétés menant à la ségrégation sont donc complexes et se combinent, le coefficient de friction a aussi un rôle sur la ségrégation et permet de basculer d'un mode à un autre.

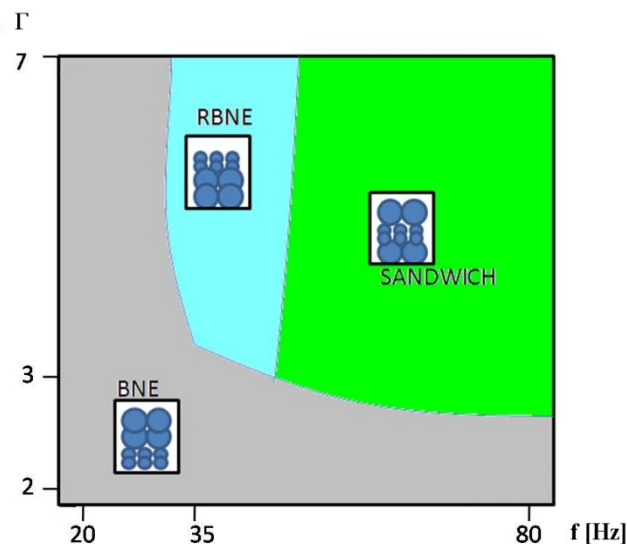


Figure 13. Représentation schématique des tendances en fonction de la fréquence  $f$  et de l'accélération  $\Gamma$  délivrées. Informations extraites de [35] pour un mélange de grains de cuivre de 0,25 mm et de verre de 0,12 mm soumis à des oscillations sinusoïdales verticales

Dans [35] sont testées des combinaisons d'accélération et de fréquence sur un mélange de grains de cuivre de 0,25 mm et de verre de 0,12 mm de diamètre. En fonction de la fréquence et de l'accélération appliquées, trois types de configurations sont observées : BNE, RBNE, et une combinaison « sandwich » où les grains de cuivre sont coincés entre deux couches de grains de verre (Figure 13).

Notons qu'en présence d'une distribution granulométrique gaussienne, la présence de ségrégation n'est pas systématiquement constatée (ou est trop faible pour être détectée) lorsque le milieu granulaire est soumis à des vibrations verticales (notamment dans la thèse d'Emilie Rouèche [36]). L'ensemble des paramètres ayant une influence sur la ségrégation étant très nombreux, la question de la ségrégation dans le cas d'un milieu granulaire soumis à des vibrations horizontales reste en suspens et sera l'objet de notre attention (VI.A.4 ).

### I.B .2.b.ii Coulabilité

La coulabilité désigne la capacité d'un milieu granulaire à s'écouler. Afin de dimensionner un procédé, il est parfois nécessaire de caractériser la coulabilité d'un milieu granulaire. La connaissance de cette caractéristique permet d'éviter des effets tels que le blocage ou des flux irréguliers. La coulabilité dépend de nombreux paramètres comme la distribution en taille des grains, leur forme, leur composition chimique ou encore le degré d'humidité et la température. La coulabilité n'est pas une notion intrinsèque au milieu granulaire mais dépend aussi du matériel utilisé pour le manipuler (silo, récipient soumis à des vibrations, ...) ainsi que de sa géométrie. Le même mélange peut par exemple s'écouler correctement dans un silo et difficilement dans un autre [37].

Des techniques expérimentales permettent néanmoins de caractériser la coulabilité d'une poudre dans un contexte donné. L'angle de friction interne est par exemple, dans des applications comme l'écoulement dans un silo, un bon critère pour déterminer la coulabilité. Le coefficient de friction aux parois a aussi une influence dans certaines situations. La densité du milieu granulaire peut aussi avoir un impact sur la qualité de son écoulement. Dans [37] sont listés différents critères d'écoulement avec différentes expériences de caractérisation utilisées dans le milieu pharmaceutique.

Un des dispositifs classiques de caractérisation est le test de cisaillement effectué avec la cellule de Jenike, constituée d'un anneau et d'un couvercle rotatif sur lesquels s'exerce

une pression, ainsi que d'une base fixe [38]. Avec ce dispositif, on peut évaluer le rapport entre la force normale et tangentielle s'exerçant au seuil de déformation plastique et les états critiques d'écoulement du milieu granulaire représentés classiquement sous forme de cercles de Mohr.

Il existe des méthodes de caractérisation plus simples comme l'outil dénommé Flodex. Il s'agit ici de caractériser le milieu granulaire par la possibilité de circulation de celui-ci à travers un orifice circulaire (Figure 14). Nous présentons ici l'analyse qui en est faite dans [40]. Il faut noter que l'on considère ici uniquement l'écoulement à travers un orifice circulaire de diamètre très supérieur à la taille des grains. Pour que le milieu granulaire s'écoule à travers un trou de rayon  $r$ , le poids  $P$  de la colonne de grains au dessus du trou doit être supérieur à la force de frottement  $F_f$  s'exerçant sur cette colonne de grains [39] :

$$\pi^2 h \rho_v g \geq 2\pi h \sigma_f \quad (\text{I-39})$$

Où  $h$  est la hauteur de la colonne de grains,  $\rho_v$  la masse volumique apparente de l'empilement,  $g$  l'accélération de la pesanteur et  $\sigma_f$  la contrainte moyenne exercée par les forces de frottement résistantes (Figure 14). Nous définissons le rayon d'écoulement critique  $r_{crit}$  comme le rayon à partir duquel le sable s'écoule et en dessous duquel aucun écoulement n'est possible. Si  $r=r_{crit}$ , il y a égalité dans la relation précédente, d'où l'on déduit :

$$r_{crit} \rho_v g = 2\sigma_f \quad (\text{I-40})$$

Notons que le sens physique d'une contrainte moyenne de force de friction résistante est ici très discutable. On peut également définir un indice  $\Omega$  de coulabilité comme l'inverse du diamètre minimal permettant l'écoulement des grains [39] :

$$\Omega \equiv \frac{1}{2r_{crit}} \quad (\text{I-41})$$

Cette caractérisation un peu grossière de la coulabilité peut s'avérer pratique.

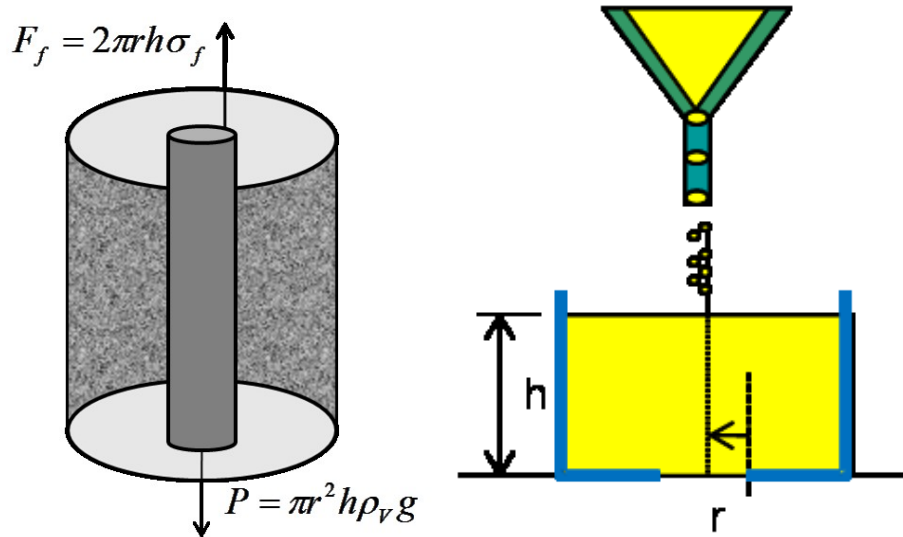


Figure 14. Critère d'écoulement pour le dispositif « Flodex ». Le poids de la colonne de sable doit être supérieur à la force de friction exercée sur celle-ci

Notons que la coulabilité n'est pas uniquement fonction des propriétés intrinsèques des grains. Le milieu granulaire peut être bloqué car soumis à des contraintes externes (pression exercée sur le milieu granulaire) ou bloqué par des contraintes stériques (densité trop forte pour permettre une mobilité des grains). Cette idée est reprise par Liu [40] sous forme d'un schéma en trois dimensions dont les coordonnées sont la température granulaire (I.B.2.b.iv), la contrainte de cisaillement appliquée et l'inverse de la densité (Figure 15).

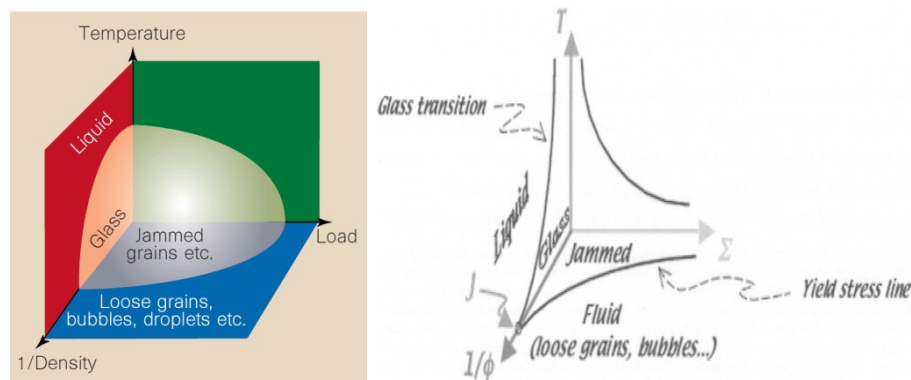


Figure 15. Diagramme d'état d'un milieu granulaire suivant trois variables, la température granulaire, la contrainte appliquée et l'inverse de la densité. A gauche, Liu [40]. A droite, Silbert [41]

Depuis, des travaux sur ce type de diagramme ont été entrepris. Aucune caractérisation générale ne semble avoir été établie. Mais un point de transition solide/liquide semble pouvoir être clairement défini pour des systèmes assez larges [41]. Il s'agit d'un point noté  $J$  où la température granulaire et la contrainte de cisaillement appliquée sont nulles. Au point  $J$ , on retrouve des analogies avec les propriétés trouvées sur les verres comme la densité importante du milieu en ce point (en fait, la densité maximale pour un empilement désordonné) et la divergence du premier pic de la fonction de distribution de corrélation de paires  $g(r)$  (probabilité de retrouver une particule à une distance  $r$ ).

#### I.B .2.b.iii Dissipation d'énergie à l'échelle des grains

Nous nous attacherons ici à étudier la dissipation d'énergie mécanique à l'échelle des grains. Notons que dans la partie III.A.3 , nous étudierons la dissipation d'énergie d'un milieu granulaire pris dans sa globalité lorsqu'il est soumis à des vibrations. Ici, nous nous focalisons sur les origines locales de la dissipation d'énergie. Deux phénomènes induisent de la dissipation d'énergie, le frottement visqueux avec le fluide interstitiel (l'air par exemple) et les chocs non élastiques entre deux grains ou entre un grain et un mur, dissipant de l'énergie thermique ou sonore, ...

Pour un fluide de viscosité  $\eta$ , et un grain de rayon  $r_g$  et de masse  $m$  animé d'une vitesse relative  $\vec{V}$  par rapport à ce gaz, la force de traînée visqueuse est égale à  $\vec{F}_{visc} = -6\pi\eta r_g \vec{V}$ . Soumis uniquement à son impulsion initiale (vitesse  $\vec{V}_0$ ), un grain s'arrête au bout d'une distance  $L$ . La détermination de cette distance  $L$  peut être faite en partant de la seconde loi de Newton  $\vec{F}_{visc} = m\vec{a}$  où  $\vec{a}$  est l'accélération. Cette expression conduit à l'équation différentielle suivante :

$$\frac{4}{3}\pi r_g^3 \rho_g \frac{dV}{dt} = -6\pi\eta r_g V \quad (I-42)$$

Où  $\rho_g$  est la masse volumique d'un grain. On trouve alors l'expression de la vitesse en fonction du temps :

$$V(t) = V_0 \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) \text{ avec } \tau = \frac{2 \cdot \rho_g \cdot r_g^2}{9\eta} \quad (\text{I-43})$$

Puis, en supposant que la position initiale est  $x(0)=0$ , on en déduit l'expression de la position du grain en fonction du temps :

$$x(t) = -V_0 \cdot \tau (1 - \exp(-\frac{t}{\tau})) \quad (\text{I-44})$$

La distance maximale pouvant être atteinte par un grain ( $t \rightarrow \infty$ ) est donc :

$$L = V_0 \cdot \tau = V_0 \frac{2\rho_g r_g^2}{9\eta} \quad (\text{I-45})$$

Un critère pour savoir s'il faut considérer les effets du fluide sur le grain est de comparer la longueur  $L$  sur laquelle il est freiné avec son libre parcours moyen  $l_c$  dans l'expérience considérée. Si le rapport  $l_c/L$  est faible ( $l_c \approx d_{grains}$  en régime dense), on pourra estimer que le fluide a peu d'influence.

Une grandeur permettant de caractériser la dissipation d'énergie lors de la collision entre deux grains est le coefficient de restitution de Newton. Il est défini comme le rapport entre la vitesse relative de deux grains  $a$  et  $b$  de propriétés identiques (masse, rayon, ...), après le choc ( $v_b$  et  $v_a$ ) et avant le choc ( $u_a$  et  $u_b$ ), soit :

$$C_r = \frac{v_b - v_a}{u_b - u_a} \quad (\text{I-46})$$

Si  $C_r=1$ , aucune énergie mécanique n'est dissipée (collision élastique), si  $C_r=0$ , toute l'énergie mécanique est dissipée lors du choc (choc entièrement dissipatif). On verra dans la section II.A que l'on peut modéliser cette perte d'énergie par une force d'amortissement visqueux pendant le choc qui sera proportionnelle à la vitesse relative des particules pendant la durée d'interpénétration (les particules seront alors modélisées par des sphères molles).

Pour une collision avec un mur, si la vitesse est  $v$  après le choc et  $u$  avant le choc, la relation (I-46) se simplifie en :

$$C_r = \frac{v}{u} \quad (I-47)$$

#### I.B .2.b.iv Température granulaire

Un moyen de caractériser l'état dynamique d'un milieu granulaire est d'en évaluer la température granulaire. Cette grandeur permet de quantifier l'agitation relative des grains. En effet, contrairement à un milieu fluide, lorsqu'un milieu granulaire est sujet à une force externe, il adopte localement des comportements aléatoires dus aux différentes natures des tailles et formes des grains ainsi que de leurs contacts. Nous pouvons décrire ces phénomènes aléatoires grâce à une approche statistique.

Par exemple, lors de la descente de grains le long d'un plan incliné, on peut décomposer le mouvement des grains en une vitesse moyenne de groupe et une vitesse fluctuante ( $v = \langle v \rangle + q$ ). Certains auteurs [42] définissent alors la température granulaire comme étant la moyenne temporelle de la vitesse fluctuante :

$$T_{gr}^{(1)} \equiv \langle q^2 \rangle \quad (I-48)$$

D'autres définissent [43] la température granulaire comme proportionnelle au surplus d'énergie cinétique par rapport à l'énergie des particules en mouvement groupé (cette formule est équivalente à (I-48) ) :

$$T_{gr}^{(2)} = T_{gr}^{(1)} = \langle v^2 \rangle - \langle v \rangle^2 \quad (I-49)$$

On peut remarquer qu'en termes mathématiques, il s'agit de calculer la variance de la vitesse. Si on prend la racine carrée de cette valeur, on obtient l'écart-type à la vitesse moyenne. On retrouve encore cette définition au facteur  $\frac{1}{3}$  près dans [43] :

$$T_{gr}^{(3)} \equiv \frac{\langle q^2 \rangle}{3} \quad (I-50)$$

Le facteur  $\frac{1}{3}$  permet ici de se rapprocher un peu plus de la température d'un gaz,

$$T = \frac{m \langle q^2 \rangle}{3k_b}.$$



Quelle que soit la manière de la définir, la température granulaire doit simplement se comprendre comme un taux de variation de vitesses des grains autour de la vitesse de groupe de l'empilement granulaire. La température est ainsi nulle lorsque tous les grains adoptent la même vitesse et de plus en plus élevée lorsque les dispersions de vitesses augmentent.

#### I.B .2.b.v Analyse dimensionnelle

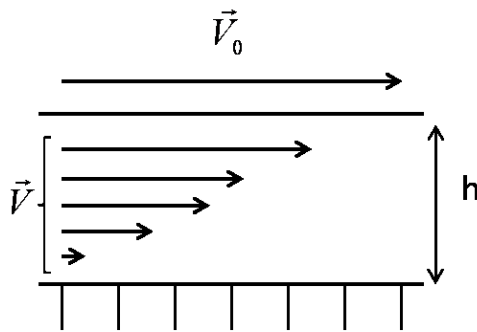


Figure 16. Test classique de cisaillement : un mélange matériau granulaire/fluide est disposé entre deux plaques parallèles, l'une fixe, l'autre mobile à une vitesse constante  $V_0$  entraînant les grains en son contact. Le taux de cisaillement est défini comme le rapport entre la vitesse  $V_0$  de la plaque mobile et la distance entre les plaques :  $\dot{\gamma} \equiv \frac{V_0}{h}$

Afin d'examiner s'il existe des lois d'échelle, il est intéressant de regarder si certains comportements du milieu granulaire dépendent d'une variable adimensionnelle. En mécanique des fluides par exemple, le nombre de Reynolds permet de définir trois régimes caractéristiques : régime de Stokes, régime laminaire et régime turbulent.

De la même manière, nous noterons trois nombres adimensionnels ; le nombre de Stokes  $St$ , le nombre de Bagnold  $Ba$  et le nombre d'inertie  $I$  ; permettant de caractériser le « régime granulaire » dans lequel nous nous trouvons. L'évaluation de ces nombres pour un milieu granulaire donné se base sur un test de cisaillement classique (Figure 16). Deux nombres adimensionnés prennent en compte le rôle du fluide interstitiel, le nombre de Stokes ([44], [45]) et le nombre de Bagnold ([46],[47],[48]). Le nombre d'inertie  $I$ , est exclusivement destiné à caractériser le comportement des milieux granulaires secs, c'est-à-dire sans fluide interstitiel, ou dans les cas où l'influence du fluide interstitiel est négligeable [47].

Le nombre de Stokes est défini de la manière suivante ([44], [45]):

$$St = \frac{\rho_g V_g \dot{\gamma}}{k\mu} \quad (I-51)$$

Où  $\rho_g$  est masse volumique des grains,  $V_g$  le volume des particules,  $\dot{\gamma} \equiv \frac{V_0}{h}$  le taux de cisaillement moyen,  $\mu$  la viscosité du fluide interstitiel et  $k$  un coefficient dépendant de l'orientation, de la taille et de la forme des particules (pour une sphère,  $k = 3\pi$ ). Le nombre de Stokes peut être vu comme le rapport entre l'énergie cinétique de la particule et l'énergie qui serait dissipée par frottement visqueux pour provoquer son arrêt.

- Quand  $St \gg 1$ , l'effet du fluide interstitiel peut être négligé.
- Quand  $St \ll 1$ , le fluide interstitiel a une influence significative sur le mouvement des particules.
- Quand  $St \approx 1$ , le système présente des comportements intermédiaires.

Le nombre de Bagnold  $Ba$  est le rapport entre les contraintes inertielles dues aux particules et les contraintes visqueuses du fluide :

$$Ba = \frac{\rho_g d_g^2 \dot{\gamma}^2 \lambda^2}{\mu \dot{\gamma} \lambda^{3/2}} = \frac{\rho_g d_g^2 \dot{\gamma} \lambda^{1/2}}{\mu} \quad (I-52)$$

où  $d_g$  est le diamètre des particules et  $\lambda$  la densité 1D (linéaire) définie comme le rapport entre le diamètre des grains  $d_g$  par la distance moyenne  $D$  entre les centres des particules. Bagnold établit qu'il existe un régime d'écoulement macroscopique visqueux pour  $Ba < 40$ , un régime dominé par l'inertie granulaire pour  $Ba > 450$ , et un régime de transition entre les deux ([44],[45],[46]).

Enfin, le nombre inertiel  $I$  est défini comme le rapport entre deux temps caractéristiques, celui du déplacement d'un grain soumis à la pression  $P$  ( $T_p = d_g \sqrt{\frac{\rho}{P}}$  où  $\rho$  est la densité volumique de masse du milieu granulaire) et celui caractéristique du cisaillement à la paroi que l'on notera  $T_{\dot{\gamma}} = \frac{1}{\dot{\gamma}}$ . D'où [47] :

$$I = \frac{\dot{\gamma}d}{\sqrt{P/\rho}} \quad (\text{I-53})$$

On observe alors 3 régimes d'écoulement différents :

- Pour  $I < 10^{-3}$ , l'effet du confinement domine. On est dans un régime quasi-statique avec des déformations très lentes. Le milieu granulaire se comporte alors plutôt comme un solide soumis à une déformation plastique.
- Pour  $10^{-3} < I < 10^{-1}$ , le confinement est important mais l'effet du cisaillement est non négligeable, le milieu granulaire se comporte alors plutôt comme un liquide.
- Pour  $I > 10^{-1}$ , le cisaillement a un rôle prépondérant. Le régime collisionnel domine. L'interaction entre les particules s'effectue essentiellement par chocs entre deux particules, le milieu granulaire se comporte alors plutôt comme un gaz.

Malgré l'existence de ces différents régimes, remarquons que des nombres sans dimension et des lois d'échelle restent difficiles à établir dans la plupart des situations. En effet, rappelons que ces caractérisations sont basées sur un test de cisaillement classique. Mais prenons par exemple des milieux granulaires vibrés horizontalement [48]. Outre que l'analogie avec le cisaillement est difficile à établir (on pourrait éventuellement évaluer des cisaillements locaux et instantanés), il reste un problème fondamental : le milieu granulaire est dans ce cas le siège de comportements et de régimes différents. En effet, le milieu peut être gazéifié en surface, liquide dans la partie centrale et bloqué au fond. Aucune loi simple (comme comparer le comportement du milieu granulaire à celui d'un fluide par exemple) ne semble pouvoir être établie. L'utilisation d'équations locales pour déterminer le comportement du milieu granulaire est donc hautement non triviale dans le cas des milieux granulaires vibrés.

## Conclusion du Chapitre I

Nous avons présenté un ensemble d'éléments permettant de définir et caractériser l'état d'un milieu granulaire.

Nous possédons des éléments de caractérisation morphologique des grains (sphéricité, arrondi, taille, masse volumique ...), de la configuration géométrique du milieu granulaire (densité, phénomènes de ségrégations possibles...).

Les propriétés mécaniques ont également été examinées en régime statique (modèles de Janssen, de Mohr) ou dynamique (contraintes, dissipation d'énergie, nombre de Bagnold, nombre d'inertie...).

Néanmoins, comme nous l'avons vu dans la section précédente « Analyse Dimensionnelle », prévoir de manière théorique le comportement d'un milieu granulaire vibré en fonction de quelques variables caractéristiques reste très délicat. Seuls des outils partiels d'analyse sont à notre disposition. Pour remédier à ce problème, nous avons décidé d'utiliser des outils de simulations numériques : grâce à la puissance de calcul des ordinateurs, le comportement du milieu granulaire est décrit depuis l'échelle du contact et des chocs entre les différentes particules, jusqu'aux mouvements d'ensemble. Le problème revient alors à résoudre des problèmes de mécanique classique.

## Chapitre II Les méthodes numériques

Au sein de notre laboratoire, des expériences ont été effectuées afin de caractériser l'influence de vibrations verticales [36] et horizontales [49] sur la densification et l'écoulement d'un milieu granulaire.

Des méthodes analytiques qui seraient inspirées de ces résultats et de la littérature, et permettant de prédire le comportement d'un milieu granulaire compacté par vibration dans une géométrie complexe, sont particulièrement difficiles à élaborer. Nous avons décidé d'utiliser une méthode numérique afin de compléter notre savoir et nos compétences. L'intérêt d'une méthode numérique est d'accéder à des informations que l'expérience ne permet pas de révéler, ou alors très difficilement, comme la vitesse des grains ou la répartition des contraintes à l'intérieur de l'empilement granulaire.

Nous allons ici exposer quelques-unes de ces méthodes de modélisation. En premier lieu, nous allons détailler le fonctionnement de la méthode des éléments discrets, ou DEM (Discret Element Method), élaborée par Cundall *et al.* [9], ainsi que les principaux algorithmes qui la constituent. Dans cette méthode, que nous avons mise en œuvre dans cette thèse, les particules sont considérées comme des sphères molles. Il n'y a pas de déformation à l'échelle d'une particule, mais une légère interpénétration (« overlap ») des particules s'opère lors d'un choc.

D'autres méthodes de modélisation existent, les principales étant :

- La méthode des sphères dures : dans cette méthode de type « event-driven »
- Les méthodes de type Monte-Carlo
- Les automates cellulaires

Le lecteur pourra aussi se référer à [50] où sont présentés divers moyens numériques de modélisation de milieux granulaires ainsi que des applications.

### II.A La méthode des éléments discrets

Dans cette méthode développée par Cundall, les grains, considérés comme des sphères molles, peuvent interagir avec leurs proches voisins (murs ou grains) par contact binaire (un seul point d'interaction entre deux entités). Les particules ont alors la

possibilité de s'interpénétrer légèrement (chevauchement ou « overlap »  $\delta$ ) mais sans déformation des particules (Figure 17). Des forces de contact et d'amortissement lors de chocs sont prises en compte.

Afin de suivre l'évolution d'un ensemble de grains au cours du temps, le calcul s'effectue en deux temps. On estime d'abord les forces qui s'exercent sur chaque grain, comprenant les forces volumiques (gravité, force magnétique éventuellement, ...) et les forces de contact. Puis, par les lois de Newton, on déduit les déplacements en translation et rotation de chacun des grains sur un pas de temps  $\Delta t$  (Figure 18, équation (II-13)).

La clé de voûte de cette méthode tient dans le fait que le pas de temps doit être choisi assez petit pour que, à l'échelle de ce pas de temps, le déplacement d'un grain ait une influence insignifiante au-delà de ses voisins directs.

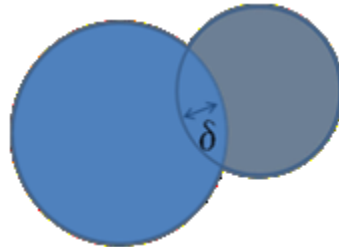


Figure 17. Distance d'interpénétration  $\delta$  entre 2 particules

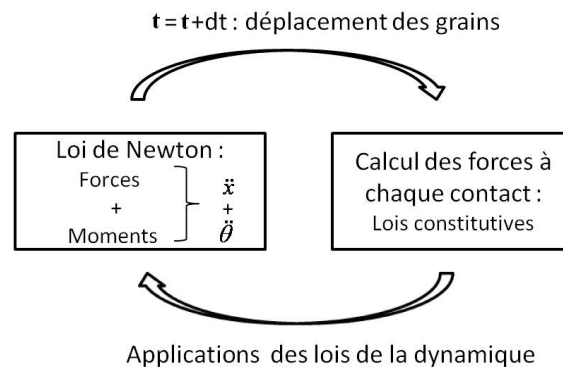


Figure 18. Cycles de calcul dans la méthode DEM

Les particules sont soumises pendant le contact ( $\delta > 0$ ) à des forces de répulsion. Ces forces sont induites par la rigidité des particules. Par ailleurs, un amortissement visqueux rend compte de la perte d'énergie des particules lors d'un choc. Notons que plusieurs modèles de contact existent pour rendre compte de la force de répulsion entre particules. Deux principaux modèles existent : le modèle de type ressort linéaire où la force de répulsion normale  $F_n^{rigid}$  est proportionnelle au chevauchement  $\delta$  :

$$F_n^{rigid} = k_n^{linaire} \delta \quad (II-1)$$

Le modèle de Hertz est plus proche de la réalité physique dans une géométrie 3D où la force de répulsion est proportionnelle à  $\delta^{\frac{3}{2}}$  :

$$F_n^{rigid} = k_n^{Hertz} \delta^{\frac{3}{2}}. \quad (II-2)$$

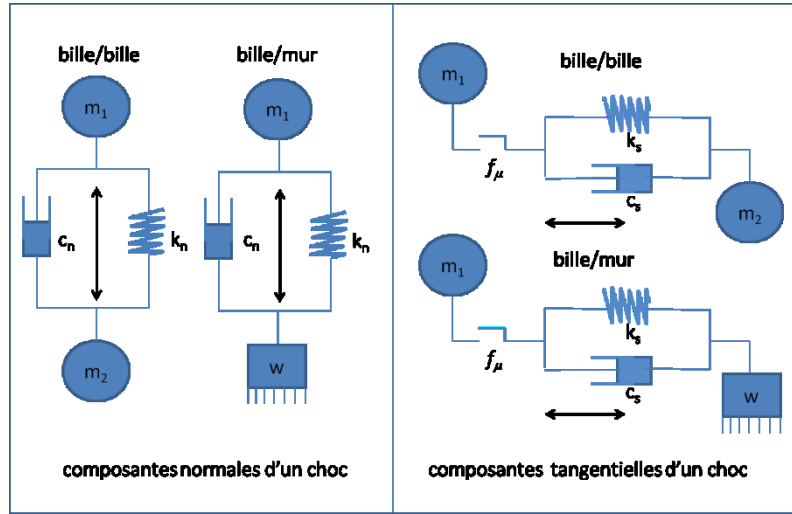


Figure 19. Représentation schématique des forces d'interaction entre une particule (bille) et une autre particule (bille) ou bien une paroi (mur) dans la méthode DEM, avec patin ( $f_\mu$ ), ressorts ( $k_n, k_s$ ), et amortisseurs ( $c_n, c_s$ )

Pour le modèle linéaire (modèle très simplifié), on peut trouver une approximation de  $k_n^{linaire}$  en fonction du rapport  $\alpha$  entre le rayon de la section de contact et le rayon  $r_g$  des sphères (Figure 20 et la démonstration de la formule en annexe II) :

$$k_n^{linaire} \equiv \frac{\pi E}{2} r_g \alpha^2 \quad (II-3)$$

Rq. : pour un module d'Young  $E \approx 100 \text{ GPa}$  proche de celui de la silice et des grains de rayon  $r_g = 0,5 \text{ mm}$ , on trouve dans le modèle linéaire en considérant le rapport  $\alpha = 0,1$  :

$$k_n^{linaire} \approx 10^6 \text{ N.m}^{-1}$$

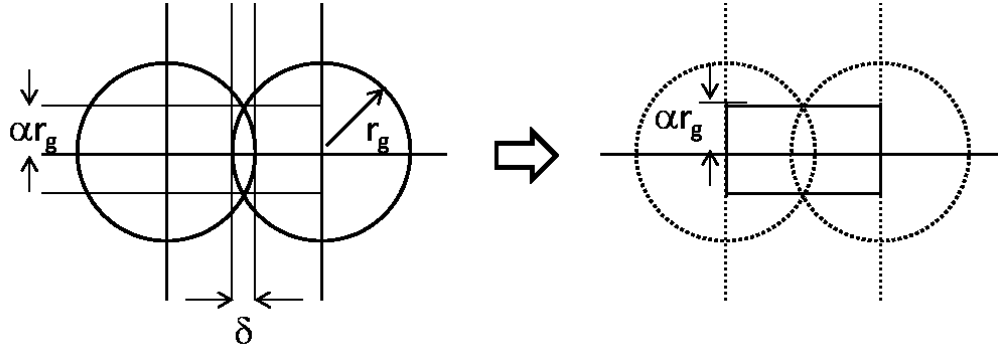


Figure 20. A gauche la représentation schématique d'une interpénétration. A droite, l'approximation du volume de contact à un cylindre de rayon  $\alpha r_g$  et de longueur  $2 r_g$

Pour le modèle d'Hertz, on peut trouver une approximation de la valeur de  $k_n$  en fonction du coefficient de poisson  $\nu$ , du coefficient de cisaillement  $G$  propre au matériau ( $G = \frac{E}{2(1+\nu)}$  où  $E$  est le module d'Young du matériau), et du rayon  $r_g$  des particules.

Selon le modèle d'Hertz utilisé dans nos modélisations ([51],[52]), on trouve :

$$k_n^{Hertz} = \frac{2G\sqrt{2r_g}}{3(1-\nu)} \quad (II-4)$$

Rq. : pour un module d'Young  $E \approx 100 \text{ GPa}$  proche de celui de la silice et des grains de rayon  $r_g = 0,5 \text{ mm}$ , on trouve :  $k_n^{Hertz} \approx 10^9 \text{ N.m}^{-3/2}$

On note  $F_s^{rigid}$  la force élastique due à un déplacement tangentiel  $U^s$  sans glissement. La variation de la force tangentielle  $\Delta F_s^{rigid}$  est prise proportionnelle à la variation du déplacement tangentiel  $\Delta U^s$  :

$$\Delta F_s^{rigid} = k_s \Delta U^s \quad (II-5)$$

A chaque pas de temps  $\Delta t_{phys}$ , on effectue alors l'itération  $F_s^{rigid} = F_s^{rigid} + \Delta F_s^{rigid}$ . Le coefficient de répulsion  $k_s$  est usuellement pris égal à  $k_n$ , le rapport  $k_n/k_s$  étant considéré comme proche de 1 [9].



Notons que l'implémentation de la loi de Coulomb conduit à l'inégalité :

$$|F_s^{rigid}| \leq \mu_{g/g} |F_n^{rigid}| \quad (II-6)$$

Si la force tangentielle excède la valeur  $\mu_{g/g} |F_n^{rigid}|$ , la force tangentielle est imposée :

$$|F_s^{rigid}| = \mu_{g/g} |F_n^{rigid}| \quad (II-7)$$

Remarquons que la loi de Coulomb s'applique aussi lors de l'interaction entre un mur et un grain. Les règles sont identiques, seul le coefficient de friction mur/grain  $\mu_{m/g}$  diffère.

Les forces d'amortissement normale et tangentielles  $D_i$  ( $D_n$ ,  $D_s$ ) sont des forces résistantes proportionnelles à la vitesse relative des grains pendant l'interpénétration :

$$D_i = -c_i V_i \quad (II-8)$$

Les  $c_i$  ( $c_n$ ,  $c_s$ ) sont les constantes d'amortissement et les  $V_i$  ( $V_n$ ,  $V_s$ ) les vitesses relatives des grains.

Le coefficient d'amortissement  $\beta_i$  défini par  $\beta_i = \frac{c_i}{c_i^{crit}}$  permet de savoir si le système est sur-amorti ( $\beta_i > 1$ ), sous-amorti, ou amorti critiquement. La constante d'amortissement critique d'un oscillateur amorti est :

$$c_i^{crit} = 2m\omega_i = 2\sqrt{mk_i} \quad (II-9)$$

Avec  $\omega_i$  la pulsation naturelle du système non amorti,  $k_i$  le coefficient de rigidité et  $m$  la masse de la particule.

On relie le coefficient d'amortissement  $\beta_i$  au coefficient de restitution  $e$  des grains qui peut être connu par ([53], [54]) :

$$\beta_i = -\frac{\ln e}{\sqrt{\pi^2 + (\ln e)^2}} \quad (II-10)$$

La connaissance expérimentale de  $m$  et  $k_i$  permet ensuite de calculer  $c_i$ .

A ces amortissements visqueux opérant lors des chocs peut s'ajouter un amortissement numérique qui n'a pas de sens physique mais aide à la convergence du calcul en milieu dense. On retranche alors à la force totale  $F_{tot}$  s'exerçant sur un grain une fraction  $D_{num}$  de cette même force :

$$F_{tot} = F_{tot} - D_{num} F_{tot} \quad (II-11)$$

Une représentation schématique des différentes interactions implémentées lors d'un choc est donnée Figure 19 sous forme d'un système de ressorts et d'amortisseurs, muni d'une condition de glissement coulombien sur la force tangentielle. Notons qu'en réalité, le système est un peu plus complexe et il faut aussi considérer la rotation des particules. Cette considération ajoute un peu de complexité à la description du modèle, et nous n'entrerons pas dans le détail. Néanmoins, le logiciel que nous utilisons implémente cette rotation des particules. Pour plus de détails sur ce sujet, le lecteur pourra se reporter à [9].

Une fois définis les coefficients d'amortissement et de rigidité, nous pouvons évaluer le pas de temps à choisir  $\Delta t_{phys}$ . Notons tout d'abord que le temps d'une collision de grains est principalement fonction de la rigidité des particules et de la masse des grains. Pour un modèle de type ressort linéaire, la période d'oscillation (qui correspond à la durée de collision) est

$$T_c = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k_{eq}}} \quad (II-12)$$

Où  $k_{eq} = k_n/2$  correspond au ressort équivalent des deux particules en contact. On choisira donc un pas de temps  $\Delta t_{phys}$  inférieur à une durée  $\Delta t_{max}$  correspondant approximativement au dixième de la durée d'une collision :

$$\Delta t_{phys} < \Delta t_{max} = \sqrt{\frac{m}{k_n}} \quad (II-13)$$

Remarquons que pour un modèle de type Hertz, le coefficient d'amortissement jouerait un peu sur l'expression du temps de collision et donc du pas de temps, mais les résultats resteraient voisins.

On remarquera que le pas de temps choisi  $\Delta t_{phys} < \Delta t_{max}$  a une incidence directe sur le temps de calcul  $T_c$  ( $T_c = n_{it} \Delta t_{calcul}$  où  $\Delta t_{calcul}$  est le temps réel nécessaire pour effectuer

un calcul sur la période  $\Delta t_{phys}$ ). En effet, le nombre d'itérations  $n_{it}$  pour évaluer un mouvement sur un temps physique  $T_p$  est inversement proportionnel au pas de temps  $\Delta t$  ( $n_{it}=T_p/\Delta t_{phys}$ ). Le temps de calcul est proportionnel à l'inverse de la racine carrée de la masse des grains et à la rigidité des grains.

Aux origines, la validation de cette méthode a été effectuée par Cundall sur la base de travaux de De Josselin de Jong *et al.* [55], en comparant les chaînes de force observées numériquement et celles observées expérimentalement sur des particules photo-élastiques. Dans la communauté des chercheurs étudiant les milieux granulaires, elle est aujourd'hui majoritairement utilisée. On peut mentionner son utilisation dans l'étude d'un dispositif combinant des flux granulaires, des effets de ségrégations et des vibrations [56] ou encore l'étude des procédés industriels à grande échelle présentant des géométries complexes [57]. La méthode des éléments discrets donne donc des résultats satisfaisants même lorsque les dispositifs étudiés sont relativement complexes et elle peut être considérée comme un outil d'étude pertinent.

Notons que des méthodes se rapprochant de la méthode des éléments discrets sont parfois employées. Dans [41] par exemple, la rotation des particules n'est pas considérée et la friction est différemment implémentée. Pendant un choc, un grain n'est plus soumis à la loi de Coulomb mais subit une force de friction proportionnelle à la vitesse tangentielle moyenne des particules voisines. Ne connaissant pas l'influence réelle de la rotation des particules dans notre problème de milieux granulaires vibrés horizontalement, et souhaitant garder en vue l'origine physique des forces de friction, nous avons choisi de ne pas utiliser ce type de modèle simplifié. Nous utilisons donc un modèle qui tient compte de la rotation des particules.

## II.B Autres méthodes existantes

### II.B.1 Sphères dures (« Event Driven »)

Cette méthode de calcul, « pilotée par les évènements », consiste à anticiper les chocs qu'auront à subir les particules et à calculer les déplacements des grains jusqu'au prochain choc. A cette fin, il faut estimer le pas de temps  $\Delta t$  entre un choc jusqu'à

l'impact suivant, et évaluer les nouvelles propriétés des particules après le choc (vitesse, rotation), analyser l'impact suivant, et ainsi de suite. Cette méthode devrait être utilisée dans le cas où les durées de collisions sont très courtes devant l'intervalle de temps qui sépare deux collisions. Cette situation arrive dans des milieux granulaires peu denses et très agités (gaz granulaires) où il n'existe pas de contacts permanents. Notons qu'il existe des approches permettant d'utiliser cette méthode dans le cas des milieux denses. Sans rentrer dans les détails (voir Luding et Mc Namara [58]), les particules très proches et dont les vitesses d'impact sont jugées négligeables sont alors regroupées sous forme de clusters (paquets de particules se déplaçant d'un seul bloc).

Les vitesses après le choc dépendront des coefficients de restitution des particules ainsi que de leurs vitesses de translation et de rotation avant l'impact [59]. L'effet de la gravité peut être implémenté par un algorithme de correction (appelé « kick/drift » dans [60]).

La condition de base pour laquelle deux particules de rayons  $r_1$  et  $r_2$ , de positions  $\vec{x}_1$  et  $\vec{x}_2$ , avec  $\vec{x}_2 - \vec{x}_1 = \Delta\vec{x}$ , animées des vitesses  $\vec{v}_1$  et  $\vec{v}_2$ , avec  $\vec{v}_2 - \vec{v}_1 = \Delta\vec{v}$ , entrent en collision au bout d'un temps  $t$  s'écrit :

$$\|\Delta\vec{x} + \Delta\vec{v}t\| = r_1 + r_2 \quad (\text{II-14})$$

Pour évaluer le pas de temps, il faut estimer le plus petit intervalle de temps  $\Delta t$  au bout duquel un choc a lieu dans le milieu granulaire. Ensuite, les déplacements effectués pendant la durée  $\Delta t$  correspondante sont calculés, et les nouvelles vitesses de déplacement et de rotation des particules en fonction de leurs coefficients de restitution sont attribuées. Pour plus de détails algorithmiques et des exemples d'application, on pourra consulter [58],[59],[60]. Nous n'avons pas choisi ce modèle car le plus souvent, des contacts permanents existent au sein d'un milieu granulaire dense vibré horizontalement. Il faudrait dans ces cas considérer qu'une partie importante du milieu granulaire soit groupée en clusters. Mais une accumulation de réorganisations très fines (c'est-à-dire quand les grains restent globalement en contact mais quelques repositionnements par glissement et rotation s'opèrent) peut conduire à un gain significatif de densité. En considérant que beaucoup de particules sont regroupées en clusters, modéliser ce type de réorganisations fines avec cette méthode nous semble particulièrement complexe.

## II.B.2 Monte-Carlo

Des laboratoires comme celui de l'université de Rennes 1 ([11],[12]) ont développé et utilisé des méthodes de type Monte-Carlo, basées sur des évaluations statistiques de déplacement des grains, afin d'étudier les mouvements des milieux granulaires. Ces méthodes sont parfaitement adaptées au problème étudié à Rennes portant sur la compaction par vibrations verticales. Elle peut se décomposer en deux étapes :

- *une dilatation* induite par le choc vertical, modélisée par une homothétie verticale sur la position des grains. Il est ici choisi d'effectuer une dilatation variant linéairement avec l'altitude  $z$  des grains de rayon  $r_g$ . Celle-ci respecte la transformation suivante :  $(z - r_g) \rightarrow (z - r_g)(1 + \varepsilon)$ . Le paramètre  $\varepsilon$  permet de prendre en compte l'intensité  $\Gamma$  des sollicitations (accélération verticale maximale adimensionnée par la pesanteur  $g$  (III-2)).
- *une compaction*, avec un déplacement horizontal imposé de manière aléatoire et un déplacement vertical préférentiellement orienté vers le bas pour simuler la gravité. L'arrêt de la compaction s'effectue au bout d'une trentaine d'étapes environ, quand les possibilités de déplacement deviennent quasi nulles.

L'intérêt de ce type de méthode tient dans le fait que les contacts entre grains ainsi que les différentes interactions physiques entre les particules ne sont pas simulés. Il en résulte un important gain au niveau du temps de calcul. La réalité physique des interactions n'est pas prise en compte mais il s'avère que cette méthode permet d'avoir un bon accord entre les variations de densité simulées et celles observées expérimentalement ([10],[11]).

## II.B.3 Automates cellulaires

Un automate cellulaire est un programme de calcul basé sur la décomposition du milieu granulaire en cellules contenant une ou plusieurs particules. Ces cellules interagissent entre elles par des échanges de particules et de quantités de mouvement, suivant des lois précises qui permettent de visualiser l'évolution du milieu granulaire dans une expérience donnée.

On peut utiliser ce type d'algorithme dans l'étude des silos. Il s'agit ici (Baxter [61],[62]) d'effectuer le déplacement qui minimise l'énergie des grains décomposée en énergie gravitationnelle et énergie d'interaction entre grains.

Dans [63] est simulé un milieu granulaire vibré verticalement. Le réseau est formé d'hexagones pouvant contenir jusqu'à 7 particules intégralement et 2 partiellement. 9 sous-réseaux sont considérés pour que chaque particule puisse être le centre d'un de ces réseaux (Figure 21.a). L'ensemble des règles n'est pas simple et a été élaboré à l'aide d'un millier de simulation effectuées à l'aide de la méthode des sphères dures sur un ensemble de collisions jugées élémentaires. Celles-ci se décomposent en deux types : règles concernant la propagation de la quantité de mouvement des particules (onde de choc, Figure 21.b) et règles concernant le déplacement des particules (Figure 21.c).

Pour faciliter la compréhension de ces règles, nous donnons un exemple de lecture de la première colonne Figure 21b et Figure 21c :

- Figure 21b : sur la première ligne est présentée la collision considérée. Une quantité de mouvement élémentaire arrive de la gauche. Sur 1000 simulations, on retrouve 699 cas où la quantité de mouvement est redistribuée vers la droite avec absorption d'une particule sur la gauche et éjection d'une autre sur la droite. Dans 152 cas, on constate que la quantité de mouvement est redistribuée selon deux directions avec deux éjections et une absorption de particule. Dans 149 cas, la redistribution est différente.
- Figure 21c : sur la première ligne est présentée le déplacement considéré. Quand une particule arrive de la gauche, sur 1000 modélisations, elle sera toujours absorbée par la cellule dans la situation considérée.

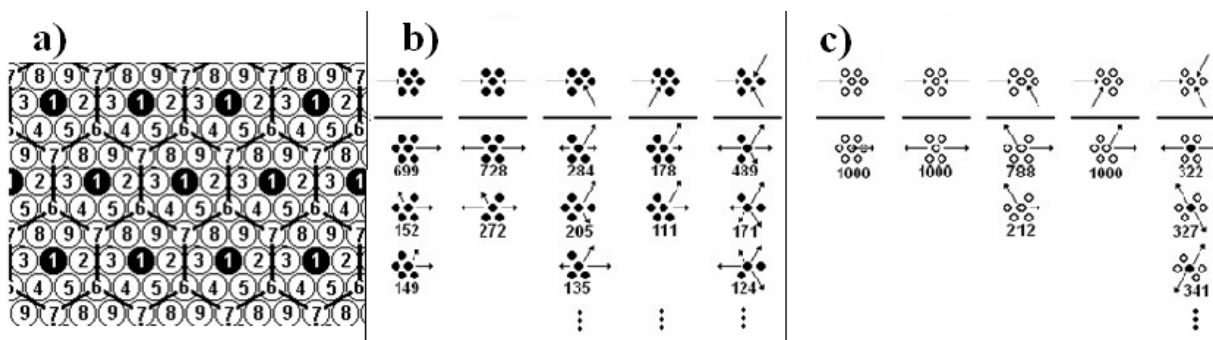


Figure 21. Automate cellulaire : réseau a) et règles de collisions b) c) (extraits de [63])

L'avantage de ce type de méthode tient aussi en une réduction importante du temps de calcul. Malheureusement, les règles régissant l'évolution de ces automates peuvent être difficiles à établir sont valables dans des situations expérimentales très particulières. De plus ce ne sont que des modèles 2D et ils sont un peu éloignés de la physique. Pour ces raisons, nous ne les utiliserons pas dans notre travail.

## **Conclusion du Chapitre II :**

Divers types de méthode permettent de modéliser le comportement d'un milieu granulaire. La méthode de modélisation par éléments discrets (DEM) est la plus couramment utilisée dans l'étude des milieux granulaires et c'est celle que nous utiliserons.

Nous avons passé en revue d'autres méthodes plus ou moins complexes pouvant modéliser le comportement d'un milieu granulaire.

Nous ne retiendrons pas la méthode des sphères dures plutôt adaptée à la simulation d'un milieu granulaire peu dense. Nous ne retiendrons pas non plus la méthode Monte-Carlo car une description statistique masque la physique du problème. Enfin, nous n'utiliserons pas non plus la méthode des automates cellulaires car les lois d'évolution de ceux-ci restent particulièrement complexes à établir dans le cas spécifique de notre étude d'un « milieu granulaire vibré horizontalement ».





## Chapitre III Milieu granulaire soumis à des vibrations

Après avoir défini une terminologie, quelques notions et références spécifiques aux milieux granulaires ainsi que les principaux outils de modélisation, nous allons présenter des études portant sur notre sujet : les milieux granulaires soumis à des vibrations. Afin de souligner les analogies entre les deux configurations, nous détaillerons dans un même temps le comportement de milieux granulaires soumis à des vibrations horizontales et verticales.

Nous rappellerons tout d'abord les deux principaux phénomènes s'opérant dans les milieux granulaires, densification et fluidisation, ainsi que leur seuil d'apparition. Puis nous nous intéresserons à deux autres phénomènes, le phénomène de ségrégation et les propriétés de dissipation d'énergie du milieu granulaire vibré. Enfin, nous caractériserons l'influence de divers paramètres procédés sur l'empilement de grains (l'accélération  $\Gamma$ , la fréquence  $f$ , et les dimensions de la boîte vibrée), qui peut à la fois se constater sur la densité et sur la vitesse d'écoulement.

Rappelons que nous ne considérons dans cette partie aucune cohésion entre les grains. Rappelons aussi que le cas classique que nous présentons est celui où la fréquence de vibration est comprise entre 20 et 200 Hz.

### III.A Phénoménologie

#### III.A.1 Considérations générales

Les milieux granulaires vibrés sont soumis à une vibration sinusoïdale de type :

$$x = A \sin \omega t \quad (\text{III-1})$$

Où  $x$  est la position de l'objet vibré,  $A$  est l'amplitude des oscillations,  $\omega = 2\pi f$  leur pulsation,  $f$  la fréquence de vibration et  $t$  le temps courant. Une variable de référence, l'accélération maximale  $\Gamma$  adimensionnée par l'accélération de la pesanteur  $g$  est usuellement utilisée pour caractériser l'intensité de la sollicitation :

$$\Gamma = \frac{A\omega^2}{g} \quad (\text{III-2})$$

Deux dispositifs typiques de vibration sont présentés Figure 22 (vibrations horizontales) et Figure 23 (vibrations verticales). Dans l'étude des vibrations horizontales, nous utiliserons une dénomination des différentes faces vibrées selon les points cardinaux, les vibrations étant orientées dans le sens Nord/Sud.

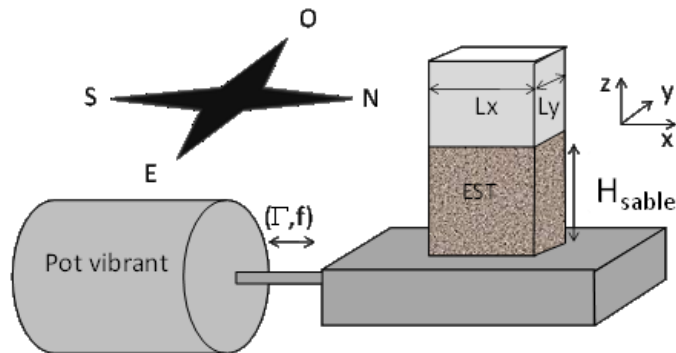


Figure 22. Représentation schématique du milieu granulaire vibré horizontalement (Raihane [64]). Pour faciliter la description des phénomènes rencontrés, les différentes faces sont dénommées selon les quatre points cardinaux (vibrations dans le sens Nord/Sud)

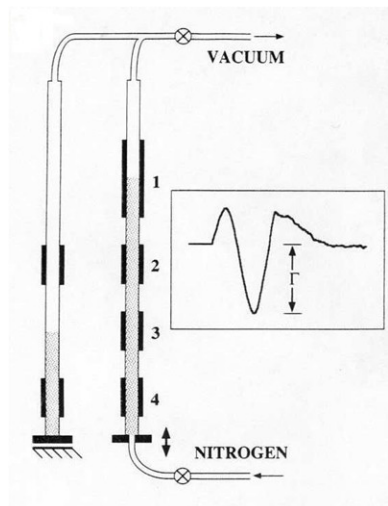


Figure 23. Dispositif expérimental des expériences de Chicago : un courant d'azote, au début d'expérience, permet d'obtenir une densité initiale faible. Le tube rempli de grains (à droite du montage) est ensuite vibré verticalement. Les densités sont mesurées de manière indirecte en observant la capacité diélectrique du milieu granulaire [10]

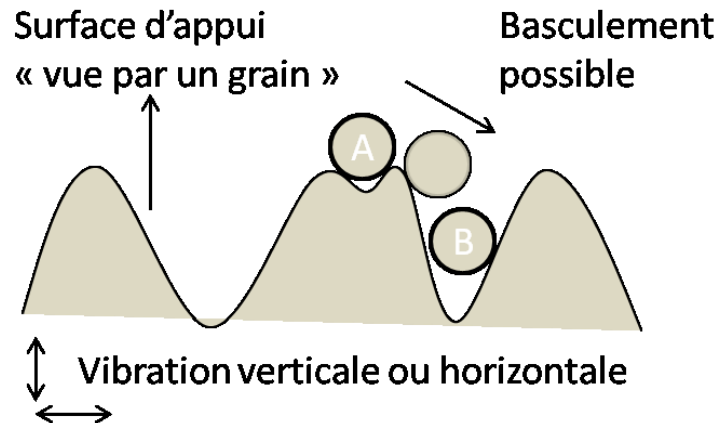


Figure 24. Sous l'effet d'une faible sollicitation, un grain peut passer d'une énergie potentielle  $V_A$  à une configuration énergétique plus faible  $V_B$ . Les effets de chaque déplacement de grain s'additionnant, cela conduit à une densification globale

En fonction de l'accélération relative  $\Gamma$ , différents comportements sont observés :

➤ Régime de densification :  $0 < \Gamma_{dens} < \Gamma_{fluid} \approx 1$

Tout d'abord, notons qu'une compaction du milieu peut s'opérer pour des sollicitations même très faibles ( $\Gamma < 1$ ). En effet, un milieu granulaire lâche placé dans un état d'équilibre instable pourra se réarranger et se compacter sous l'effet de la moindre sollicitation lui permettant d'acquérir un état plus stable. On retrouve une compaction du milieu granulaire pour  $\Gamma = 0,5$  en vibrations verticales ([36], [65]) et horizontales ([64],[66]). Une démonstration théorique d'un possible mouvement du milieu granulaire pour une accélération inférieure à 1 est donnée dans [67]. On ne peut encore parler de fluidisation du milieu granulaire dans le sens où, à cette accélération, la mise en mouvement n'est que transitoire. Il s'agirait plutôt d'un « rééquilibrage » du milieu granulaire pour atteindre un état d'équilibre plus stable. Les particules peuvent sortir d'un puits d'énergie potentielle secondaire pour atteindre un état énergétique plus faible (puits d'énergie potentielle de premier ordre) à l'occasion d'une faible sollicitation appliquée (Figure 24). Nous noterons que ces réarrangements s'opèrent plus facilement sur les couches de surface où les contraintes stériques et la contrainte moyenne qu'exercent les grains situés au dessus sont moins importantes.

➤ *Régime convectif* :  $\Gamma_{fluid} \approx 1 < \Gamma < \Gamma_c \approx 5$

On estime généralement que l'accélération relative seuil  $\Gamma_{fluid}$ , à partir de laquelle il y a mise en place d'un mouvement périodique (ou fluidisation), est proche de 1 dans le cas des vibrations verticales et horizontales.

Dans les milieux vibrés verticalement, l'interprétation de la mise en place du mouvement est assez simple, on reprendra celle établie par Evesque *et al.* [68]. Quand le contenant est soulevé, les grains sont plaqués contre le fond de la boîte et aucun réarrangement n'est possible (on parle de régime passif). Quand le contenant est accéléré vers le bas avec une accélération supérieure à celle de la gravité, on observe un décollement du milieu granulaire qui est ainsi fluidisé (on parle alors de régime actif). Les signes manifestes de mouvement périodique peuvent apparaître pour des valeurs légèrement supérieures ( $\Gamma=1,2$  dans les travaux d'Emilie Rouèche [36]). Hsiao [69] note que le coefficient de friction grains/grains  $\mu_{g/g}$  et grains/murs  $\mu_{g/m}$  ainsi que la hauteur de l'empilement ont une influence sur le seuil critique d'écoulement. Cette fluidisation se manifeste par l'apparition de rouleaux de convection contra-rotatifs.

Dans les milieux vibrés horizontalement, l'origine de la fluidisation est plus complexe. Un espace entre les parois et le milieu granulaire s'ouvre pendant les vibrations. Les premiers signes d'ouverture peuvent se constater pour des accélérations proches de  $\Gamma=0,5$  (constaté par Medved [70] à l'aide d'une caméra à prise de vue ultra-rapide). En fait, à cette accélération, la largeur de l'espace vide créé est de l'ordre d'un diamètre de grain et on ne peut à proprement parler de convection mais plutôt d'un frémissement désordonné des grains. Par contre, il a été observé, de manière certaine, qu'à partir de  $\Gamma=1,1$  un mouvement périodique s'instaure [49] (dans le cas de grains de sable de 0,5 mm de diamètre ne présentant pas de cohésion). Ici aussi, deux rouleaux de convection contra-rotatifs apparaissent.

Remarquons l'existence de certains résultats en désaccord avec une valeur du seuil de fluidisation  $\Gamma=1$ . Notamment, Aumaitre [71] constate la mise en place de rouleaux de convection pour  $\Gamma=0,5$ . L'expérience qu'il considère comporte des billes de verre ayant un coefficient de friction faible. Avec des vibrations horizontales, les coefficients de friction et la forme des particules ont donc aussi une importante influence sur le seuil critique d'écoulement. Notons que dans l'expérience d'Aumaitre, la fréquence de

vibration était comprise entre 3 et 10 *Hz*. Celle-ci est plus faible que celles habituellement étudiées (entre 20 et 200 *Hz*). L'influence de la fréquence sur le seuil de fluidisation est à notre connaissance peu étudiée et reste une donnée à approfondir.

Maintenant que nous avons parlé du seuil d'apparition des mouvements, décrivons plus en détail les phénoménologies rencontrées. On observe l'apparition de rouleaux de convection très similaires pour les vibrations verticales et horizontales (champs de vitesses juxtaposés, Debayle [72] et Hsiau [73], Figure 25). Pour les vibrations horizontales, la visualisation des rouleaux se fait sur la face Est. Schématiquement, les grains tombent le long des parois Nord/Sud, puis remontent au centre de l'empilement (Figure 26). La chute le long des parois s'opère notamment grâce à l'espace vide créé entre l'empilement granulaire et les parois, comme constaté par Medved [70], mais remarquons que ce n'est pas l'unique cause de la convection. En effet, le phénomène est plus complexe puisque Liffman [33] a constaté une inversion des rouleaux de convection dans ses modélisations. Dans son modèle, les grains choisis subissaient des forces de friction pour les contacts entre murs et grains mais pas pour les contacts entre les grains eux-mêmes. Cela souligne l'importance que les forces de friction jouent sur la convection granulaire.

Pour des vibrations verticales, on peut expliquer (Gallas [74]) l'apparition de la convection par l'influence des forces de friction entre les grains et les murs. Lors de la montée de la boîte, les grains sont plaqués contre les parois et ont de faibles possibilités de déplacement. Pendant la descente, le milieu granulaire reste globalement lâche et les grains le long des parois sont entraînés par frottement avec les murs verticaux.

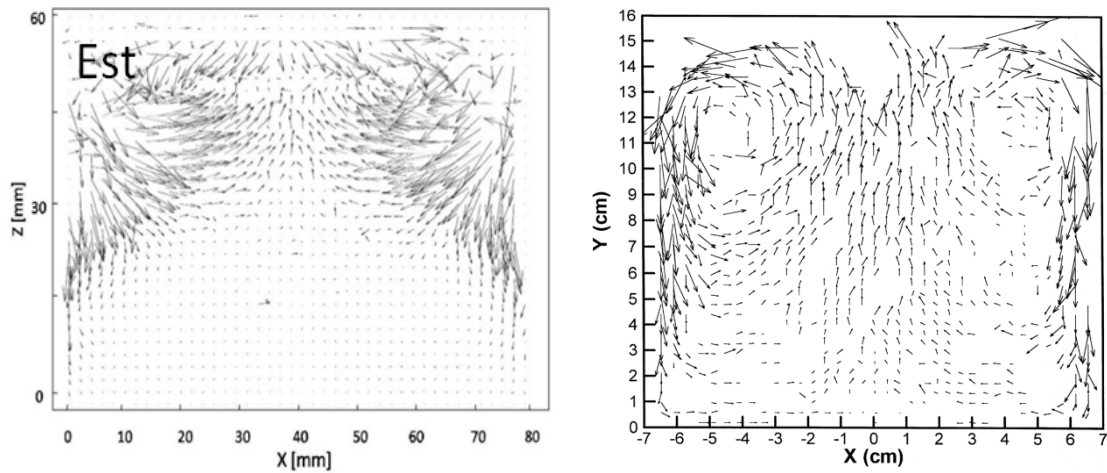


Figure 25. A gauche, vibrations horizontales, champ de vitesse visualisé sur la face Est.  $\Gamma=4.2$ ,  $f=50$  Hz [72]. A droite, vibrations verticales,  $\Gamma=3$ ,  $f=11$  Hz [73] , Vitesses typiques de convection dans les deux situations :  $0-30 \text{ mm.s}^{-1}$

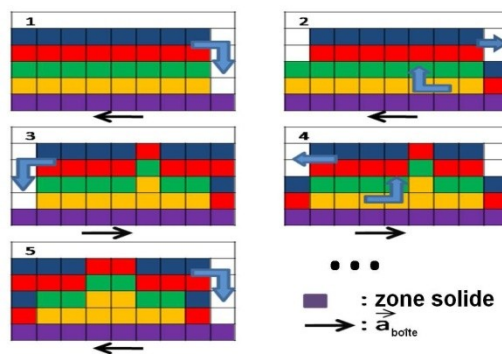


Figure 26. Schéma illustrant l'apparition des rouleaux de convection en vibration horizontale pour  $\Gamma > 1$

En parallèle à ce phénomène de convection, dans le cas des vibrations horizontales et verticales, s'opère une densification du milieu granulaire qui atteint alors des couches profondes de l'empilement ([36],[49]).

➤ Régimes critiques :  $\Gamma_c \approx 5 < \Gamma$

Pour de fortes accélérations, les phénomènes rencontrés sont variés et complexes. A partir d'un seuil  $\Gamma_c \approx 5$ , le milieu granulaire n'est en moyenne plus soumis à une compaction mais à une expansion. A cause principalement de l'agitation importante des couches de surface, la densité globale de l'empilement diminue. Les profils de surface

sont alors variés : formation de vagues, voire d'arches pour les vibrations verticales [69]. Divers profils sont constatés pour les vibrations horizontales : une surface plane, deux bosses centrales ou latérales, un dôme. Les différentes configurations pour des vibrations horizontales ont été étudiées par Raihane ([49], Figure 27) en fonction de la fréquence et de l'accélération. Notons que, au moins dans le cas des vibrations horizontales, et dans le domaine (20-100 Hz), la fréquence a une influence assez faible sur la phénoménologie rencontrée.

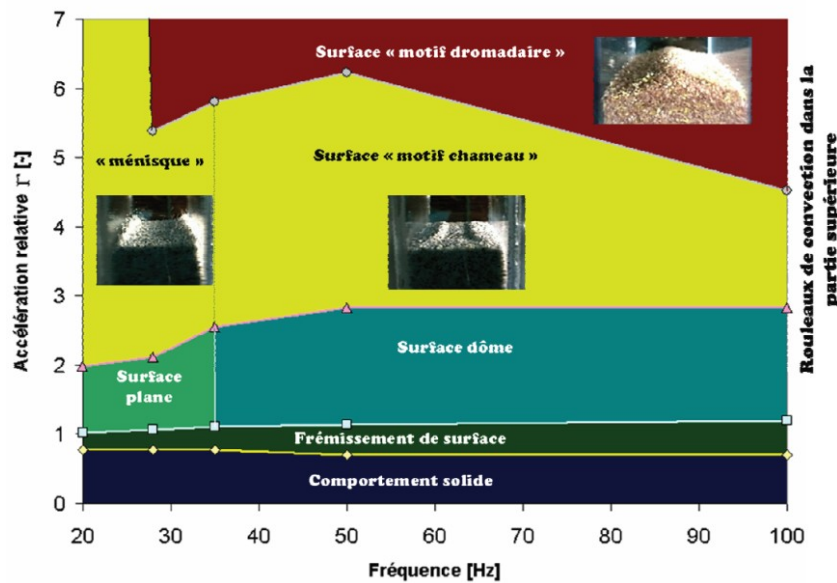


Figure 27. Phénoménologie de sable vibré (silice, diamètre des grains  $d_g \approx 0,5$  mm) en fonction de la fréquence et de l'accélération.  $L_x = 40$  mm,  $L_y = 80$  mm. Losanges : frémissement de surface. Carrés : transition vers l'écoulement. Triangles : apparition de motifs à la surface libre. Cercles : motif dromadaire à la surface libre. Diagramme extrait de [49]

### III.A.2 Précisions sur les étapes dans le procédé de compaction ainsi que sur la mise en place d'un régime stationnaire

Dès que le système est soumis à des sollicitations douces, un processus de densification commence à s'opérer. Dans les expériences de Chicago ([65], Figure 28), il

est relevé une évolution logarithmique de la densité pour toutes les accélérations verticales comprises entre  $\Gamma=0$  et  $\Gamma=7$ , suivant une loi du type :

$$C(t) = C_{\infty} - \frac{\Delta C_{\infty}}{(1 + B \ln(1 + \frac{t}{\tau}))} \quad (\text{III-3})$$

Les paramètres  $C_{\infty}$ ,  $\Delta C_{\infty}$ ,  $B$ ,  $\tau$  dépendent uniquement de l'accélération  $\Gamma$ . Remarquons que cette approximation fonctionne également pour  $\Gamma=0,5$  où une compaction de faible intensité (+1%) a été remarquée [65].

Nous appelons « temps de compaction » la durée nécessaire pour atteindre un régime stationnaire où les densités locale et globale n'évoluent plus. Raihane [49] a montré dans un contexte expérimental identique à celui que nous mettons en œuvre que ce temps de compaction est d'une dizaine de secondes environ (Figure 29).

On qualifie l'état du milieu granulaire d'initial quand il n'a pas encore subi de vibration. On le qualifie de transitoire quand il n'a pas encore atteint un régime stationnaire et se trouve déjà soumis à des vibrations. On le qualifie d'état vibré quand le régime stationnaire est atteint et que le milieu granulaire subit des vibrations. Enfin, on le qualifie de relaxé quand le milieu granulaire n'est plus vibré et a atteint son état d'équilibre.

Une loi claire permettant de déterminer le temps de compaction dans un milieu vibré horizontalement en fonction de la géométrie de l'expérience et des paramètres procédés n'est à notre connaissance pas encore établie.

La vitesse de déplacement des grains peut aussi être prise en compte pour caractériser la compaction du milieu granulaire. Raihane (Figure 30) constate un pic de vitesse moyenne en face Nord orienté vers le bas durant les 10 premières secondes de compaction. Ce pic correspond à un mouvement global, en volume vers le bas, caractéristique de la compaction du milieu granulaire.



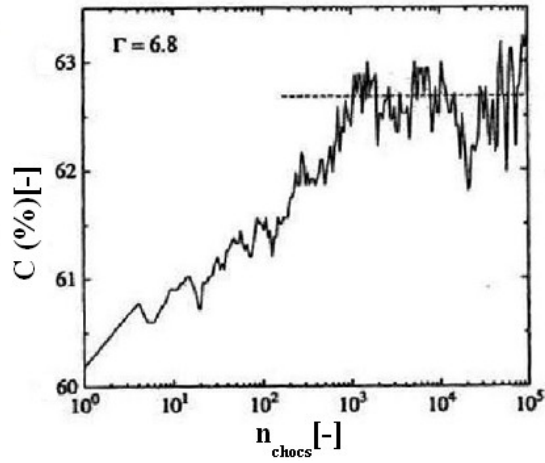


Figure 28. Evolution de la densité en fonction du nombre de sollicitations imposé (chocs verticaux), échelle logarithmique. [65]

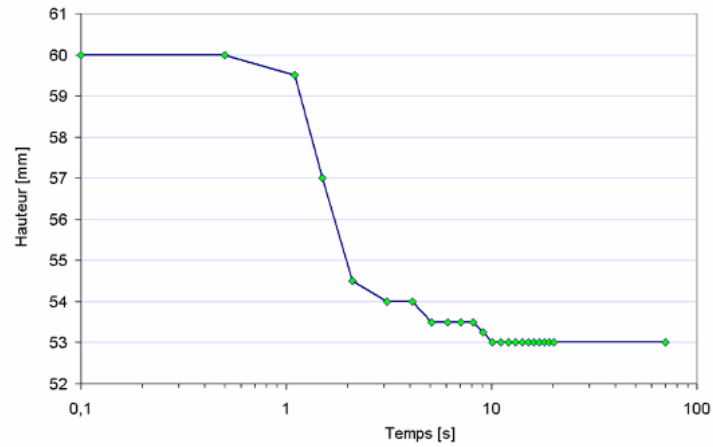


Figure 29. Evolution temporelle de la hauteur de l'empilement contre la face Nord d'un empilement vibré à 50 Hz et  $\Gamma=4,4$ . Boite de 80 mm \* 40 mm [49]

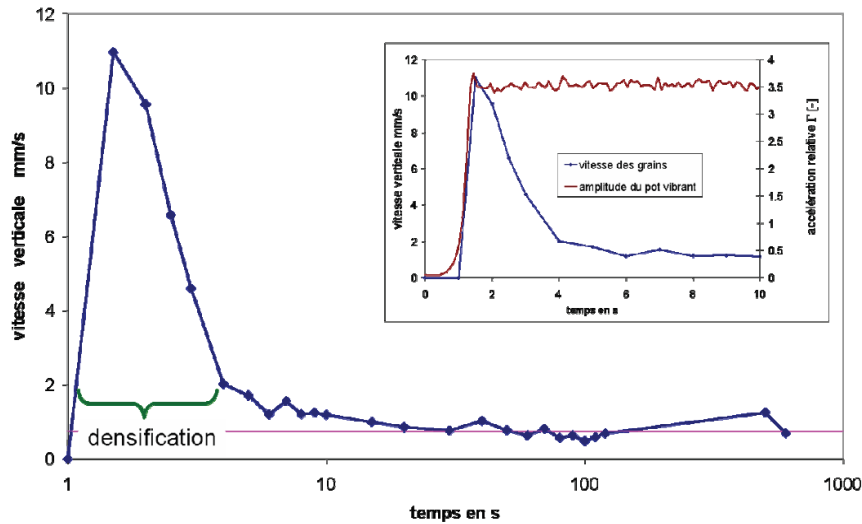


Figure 30. Evolution temporelle de la vitesse des grains en face Nord pour un empilement vibré à 50 Hz,  $\Gamma=3,5$ . [49]

### III.A.3 Dissipation d'énergie

Nous avons relevé deux articles traitant de la dissipation d'énergie dans un milieu granulaire vibré verticalement (aucun n'a été trouvé dans le cas de vibrations horizontales). Nous nous baserons surtout sur l'étude de l'article de Matchett *et al.* [75], qui a mesuré expérimentalement l'énergie dissipée d'un milieu granulaire vibré et l'a comparée aux résultats de simulation obtenue par la DEM. Ensuite, l'article de McNamara *et al.* [76] donne des idées intéressantes pour évaluer d'une autre manière l'énergie totale et dissipée du milieu granulaire modélisé.

Matchett (Figure 31), à l'aide d'un accéléromètre et d'un capteur de force, mesure expérimentalement l'énergie nécessaire pour mettre en vibration un échantillon. Pour ce faire, il se base sur quelques relations simples que nous allons décrire.

Premièrement, le calcul de la force  $f$  exercée par le milieu granulaire sur le support de vibration :

$$f = F - M\ddot{x} \quad (\text{III-4})$$

Où  $F$  correspond à la force mesurée par le capteur de force,  $\ddot{x}$  l'accélération mesurée à l'aide de l'accéléromètre et  $M$  la masse totale de l'échantillon vibré.

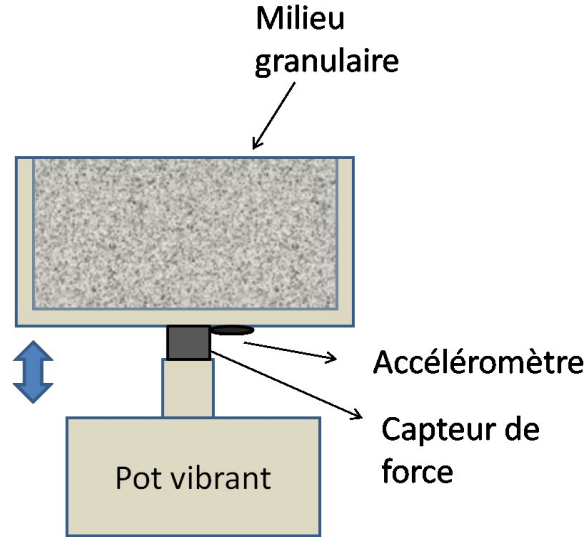


Figure 31. Représentation schématique du dispositif expérimental utilisé dans [75]

Il en déduit ensuite le travail élémentaire de  $f$  qui correspond à la variation énergie  $\delta E$  sur un temps  $\delta t$  durant lequel s'opère un déplacement infinitésimal  $\delta x$  :

$$\delta E = f \delta x \quad (\text{III-5})$$

Il détermine ensuite l'énergie totale consommée :

$$E = \sum_i \delta E \quad (\text{III-6})$$

On peut aussi en déduire la puissance dissipée instantanée :

$$P_{inst}(t) = \frac{dE}{dt} \quad (\text{III-7})$$

Et finalement en prenant une durée  $\tau$  très grande, on en déduit la puissance moyenne dissipée :

$$P = \frac{E}{\tau} \quad (\text{III-8})$$

Dans un deuxième temps, Matchett utilise la méthode des éléments discrets. La méthode de calcul de l'énergie est différente puisqu'il est possible d'avoir accès directement à une décomposition de l'énergie totale  $U$  du milieu granulaire. Celle-ci est la somme de l'énergie cinétique totale  $E_c$  et de l'énergie potentielle normale  $E_p(k_n)$  et tangentielle

$E_p(k_s)$  stockée dans les particules (pour illustration, on peut penser à des ressorts comprimés lors des chocs) :

$$U = E_c + E_p(k_n) + E_p(k_s) \quad (\text{III-9})$$

Remarquons que dans cette formule n'est pas considérée la variation d'énergie potentielle due à une variation d'altitude du milieu granulaire suite à la vibration. Une proposition de correction pour implémenter cette énergie potentielle de gravitation est proposée dans la publication. L'énergie dissipée peut se calculer directement à l'aide de la somme  $dF$  des énergies dissipées par les forces d'amortissement normales et tangentielles exercées sur les particules :

$$dF = dN + dT \quad (\text{III-10})$$

On peut alors calculer la variation totale d'énergie :

$$\delta E = dU + dF \quad (\text{III-11})$$

Ensuite, comme pour le système expérimental, l'énergie totale consommée et la puissance dissipée sont calculées.

Listons quelques-uns des principaux résultats apparaissant dans [75] :

- La puissance dissipée apparaît proportionnelle à l'accélération délivrée (Figure 32).
- La puissance dissipée décroît quand le coefficient de friction augmente.
- De manière générale, la puissance dissipée dépend de manière importante de la nature du matériau des grains vibrés (Tableau 2).
- La puissance dissipée de la taille du contenant vibré pour une masse de grains identique (Figure 32).
- Pour de faibles accélérations, l'énergie totale du système, calculée avec la méthode des éléments discrets, est principalement constituée par l'énergie potentielle stockée dans les ressorts. A partir de  $\Gamma=5$ , l'énergie totale est principalement constituée par l'énergie cinétique des grains.

Des critiques importantes du modèle sont énoncées dans la publication :

- Pour de faibles accélérations ( $\Gamma < 1$ , pas de décollement de grains), la puissance dissipée instantanée suit un profil de type « papillon » totalement symétrique (Figure 33). Notons que ce type de graphique paramétré nous signale qu'il n'y a pas de dissipation d'énergie en moyenne (ou très peu) à faible accélération. On ne retrouve pas ce type de symétrie en modélisation (Figure 34).
- L'auteur n'explique pas le graphique d'évolution de la force qui s'exerce sur la paroi du bas en fonction du temps (Figure 35). Il s'attendait à une variation sinusoïdale de celle-ci.

Verre (425-600 $\mu\text{m}$ )	$P \propto \Gamma^2 \omega^2 m^2$
Bronze (800 $\mu\text{m}$ )	$P \propto \Gamma^2 \omega^4 m^2$
Acrylique (425-600 $\mu\text{m}$ )	$P \propto \Gamma^2$
DEM (standard 500 $\mu\text{m}$ )	$P \propto (\Gamma \omega)^{\frac{4}{3}} m^{1.2}$
DEM (sphères dures 500 $\mu\text{m}$ )	$P \propto (\Gamma \omega)^{\frac{1}{2}} m^{1.2}$
Système linéaire	$P \propto \frac{1}{2} c (\Gamma \omega)^2$

Tableau 2. Puissance dissipée en fonction de la nature des matériaux vibrés.

$\Gamma$  : amplitude maximale de l'accélération.  $m$  : masse par unité de surface du milieu vibré.

$\omega$  : pulsation.  $c$  : coefficient de frottement

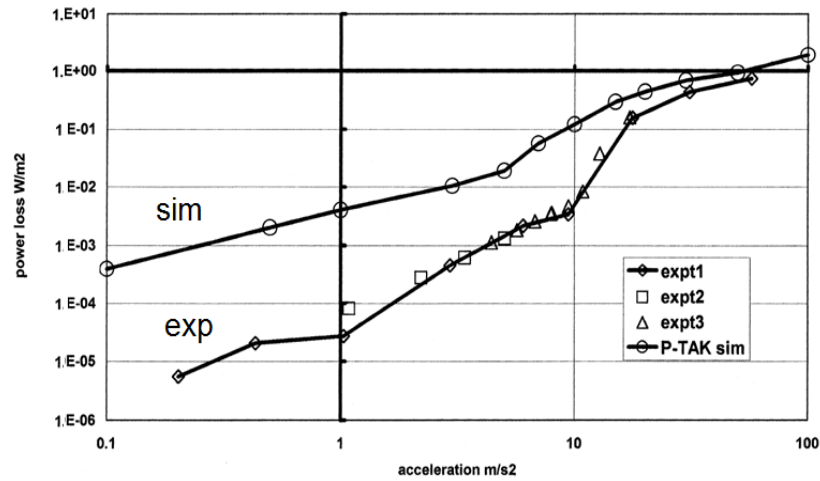


Figure 32. Variation de la puissance dissipée en fonction de l'accélération. Résultats expérimentaux (courbe du bas) pour trois tailles de diamètre de cylindre différentes (30, 40, 80 mm de diamètre) et simulés (courbe du haut) pour 2 tailles (40 mm et 80 mm). Billes de verre dans l'expérience, sphères dures en modélisation.  $d_g=425-600 \mu m$

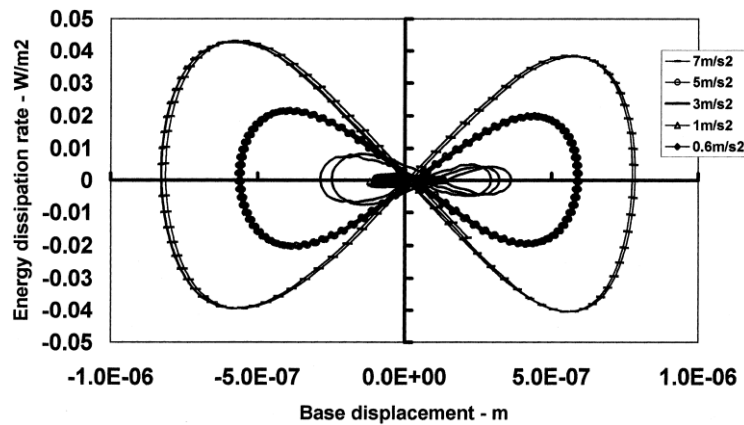


Figure 33. Taux de dissipation d'énergie pour différentes accélérations en fonction du déplacement de la base vibrée. Résultats expérimentaux pour des billes de verres (425-600  $\mu m$ ). 10 couches de grains de profondeur à 500 Hz pour un récipient cylindrique d'un diamètre de 84 mm

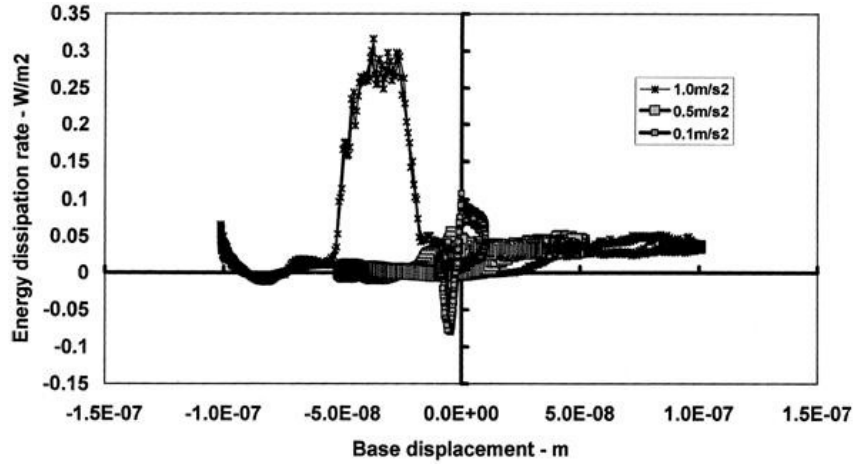


Figure 34. Taux de dissipation d'énergie pour différentes accélérations en fonction du déplacement de la base vibrée. Résultats de simulations DEM pour des grains durs, profondeur de 10 couches de grains,  $f = 500$  Hz, récipient cylindrique de diamètre 84 mm

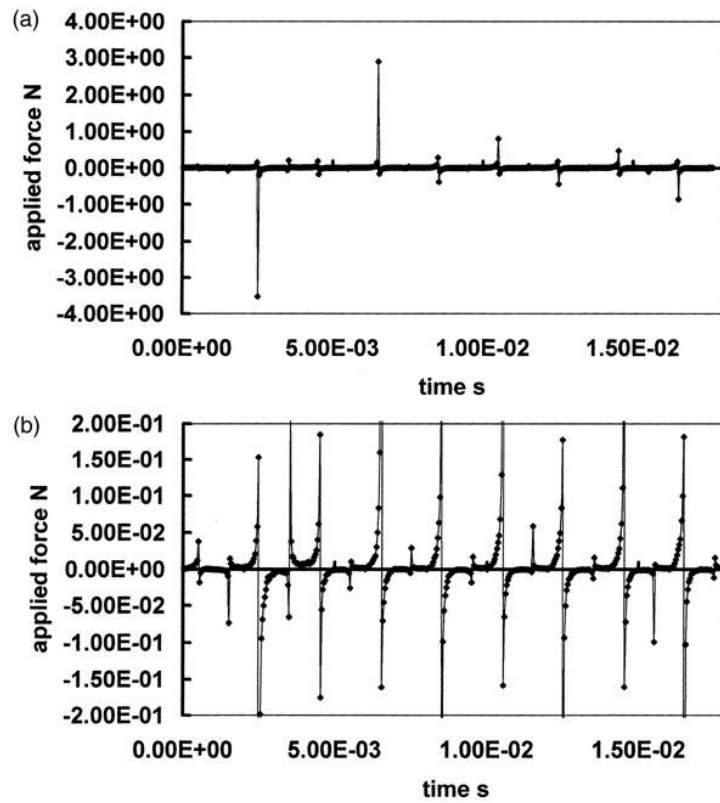


Figure 35. Modélisation de la force s'exerçant sur la paroi du fond. Sphères dures de  $800 \mu\text{m}$  ; 10 couches de grains.  $f = 500$  Hz et  $a = 20 \text{ m.s}^{-2}$  (a) Grande échelle de force, et (b) Zoom sur une échelle de force plus restreinte

Nous imputons les mauvaises corrélations entre l'énergie dissipée mesurée expérimentalement et calculée par modélisation à la non-implémentation de l'énergie potentielle de pesanteur des grains dans le calcul de l'énergie totale. Matchett *et al.* évoquent aussi une possible non concordance entre les paramètres réels comme le module d'Young et le coefficient de restitution et les paramètres modélisés comme la rigidité et coefficient d'amortissement. Ce point reste à approfondir.

Nous sommes moins circonspects par les résultats présentés sur la Figure 35 présentant l'évolution de la force à la paroi en fonction du temps calculée en simulation et ne nous attendions pas à une évolution sinusoïdale de celle-ci. En effet, même si l'accélération délivrée est sinusoïdale, la force s'exerçant par la paroi du bas ne doit pas forcément suivre une évolution du même type. La masse apparente constatée peut se trouver nulle à certains moments quand la paroi n'est plus en contact avec les grains. Celle-ci subit un choc violent à chaque retombée de grains et la masse apparente constatée peut alors être supérieure à la masse réelle. La formule  $f = M_{grains} a$ , où  $M_{grains}$  est la masse totale des grains, et  $a$  l'accélération de la paroi n'est pas applicable. Cette notion de masse apparente est approfondie et étudiée plus loin (VII.B.2.a ).

La prise en compte seulement de l'énergie potentielle stockée dans les ressorts, et l'omission de l'énergie de rotation des grains ainsi que de l'énergie potentielle des grains peut expliquer en partie les désaccords entre les résultats expérimentaux et simulés dans [75].

L'étude de McNamara *et al.* [76] est plus calculatoire et les modélisations présentées s'appuient sur la méthode des sphères dures. L'un des principaux buts de cette étude est la détermination précise de l'énergie cinétique moyenne et de l'énergie potentielle de gravitation moyenne des particules. Nous en retiendrons le calcul de l'énergie totale du milieu granulaire qui diffère notablement de la précédente estimation (III-9) puisqu'il n'y a aucune énergie stockée dans des ressorts dans ce modèle. Dans cette approche, il considère que l'énergie totale peut se décomposer en trois termes : l'énergie cinétique de translation des grains, l'énergie cinétique de rotation des grains et l'énergie potentielle des grains  $mgh_0$  où  $h_0$  correspond à la hauteur des grains au dessus de leur position d'équilibre. Cette hauteur  $h_0$  est estimée dans [77] (équation 14 de la référence [77]).

Il considère entre autre (d'autres hypothèses sont considérées) une approximation de la puissance dissipée par la formule déterminée numériquement :



$$P \approx \frac{1}{2} Nmg <V>^2 \left( \frac{m}{H^{-\bar{\nu}} <V>^{\bar{\delta}}} \right)^{\frac{1}{2}} \quad (\text{III-12})$$

Où  $<V>$  est la vitesse moyenne de vibration,  $N$  le nombre de grains,  $H$  la hauteur de l'empilement granulaire,  $g$  la pesanteur ( $\text{m.s}^{-2}$ ),  $\bar{\nu}$  et  $\bar{\delta}$  sont des coefficients à déterminer de manière empirique. Une approximation proposée est  $\bar{\nu} \approx 0,6$  et  $\bar{\delta} \approx 1,41$  quand  $P$  est en *Watt*,  $m$  en *kg*,  $V$  exprimé en  $\text{m.s}^{-1}$  et  $H$  en *m*. Le dimensionnement de cette équation est incorrect, mais il ne s'agit que d'une approximation de la puissance dissipée basée sur des résultats numériques et non d'une loi théorique.

### III.B Caractérisation fine de l'influence de l'accélération de la fréquence et de la friction

Nous avons déjà présenté sommairement dans la partie III.A.1 l'influence de  $\Gamma$ , de la fréquence et mentionné que la friction inter-grains et entre murs et grains avaient un rôle sur le comportement global du milieu granulaire.

Nous allons maintenant caractériser plus précisément l'influence des différents paramètres procédés (l'accélération, la fréquence, la géométrie considérée, les coefficients de friction) sur deux observables : la vitesse (en face Nord dans le cas des vibrations horizontales) et les densités globale et locale du milieu granulaire. Dans le cas des vibrations horizontales, nous présenterons tout d'abord l'évolution de la vitesse en face Nord en fonction de l'accélération. Ensuite, dans le cas des vibrations horizontales et verticales, nous détaillerons de manière plus précise l'influence des paramètres procédés sur la densité globale et locale. L'influence du frottement sera aussi caractérisée.

Ces caractérisations précises se basent principalement sur les études effectuées au sein de notre laboratoire par Emilie Rouèche [36] et Ahmed Raihane [49].

#### III.B.1 Influence de paramètres procédés

##### III.B.1.a Influence de l'accélération $\Gamma$ et de la fréquence $f$ sur la vitesse des grains en face Nord (vibrations horizontales)

Raihane [49] a étudié le comportement de grains soumis à des vibrations horizontales. Son étude s'appuie largement sur la notion de vitesse d'écoulement sur la

face Nord en fonction de l'accélération délivrée. Dans l'expérience considérée, le diamètre moyen des grains est de  $520 \mu\text{m}$  et les dimensions du contenant sont données Figure 36. Il constate que la vitesse de chute des grains est maximale à une faible profondeur (environ 3 mm) et tend à diminuer vers le fond de l'empilement granulaire (Figure 37). Sur la Figure 38 est tracée l'évolution de la vitesse maximale en face Nord en fonction de l'accélération délivrée. Remarquons le seuil critique  $\Gamma_{fluid}=1$  en dessous duquel la vitesse des grains reste nulle. Avec une hauteur de sable initiale de 20 mm, cette vitesse atteint une valeur asymptotique d'environ  $23 \text{ mm.s}^{-1}$  pour  $\Gamma=4$  environ. Nous verrons que l'existence et la valeur de la vitesse sur ce plateau dépend de la configuration étudiée, en particulier de la hauteur de sable.

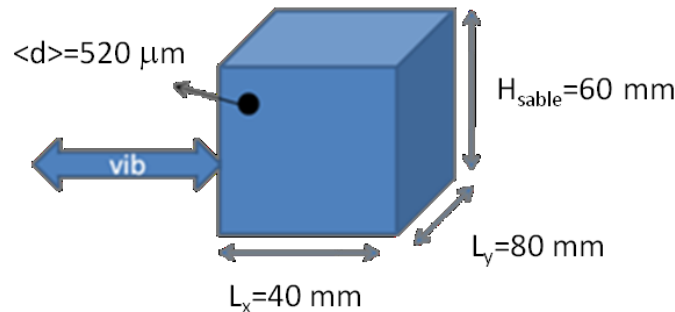


Figure 36. Dimensions intérieures du récipient contenant le milieu granulaire considéré dans [49]

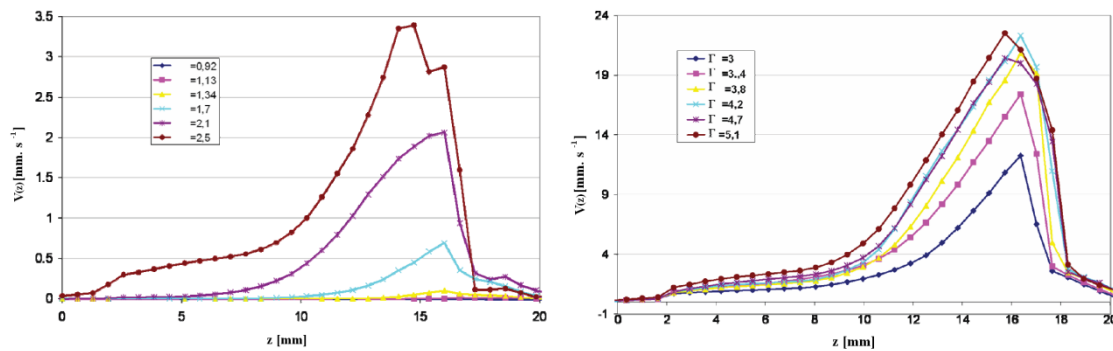


Figure 37. Influence de  $\Gamma$  sur la vitesse en face Nord en fonction de la hauteur  $z$  dans l'empilement pour une hauteur initiale de 20 mm [49]

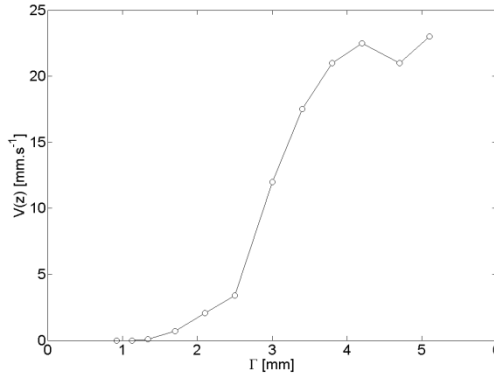


Figure 38. Vitesse maximale en face Nord en fonction de l'accélération délivrée (tracé à partir d'informations extraites de [49])

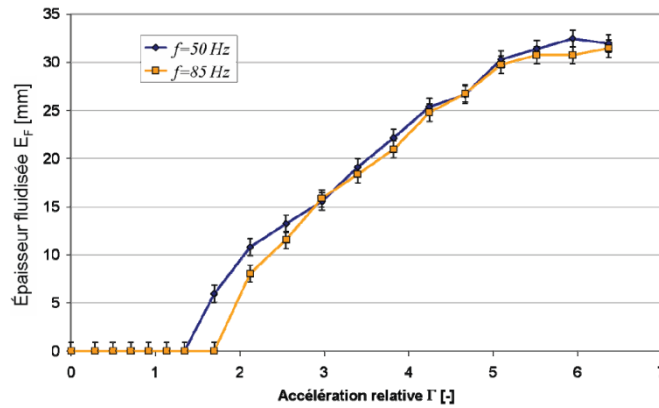


Figure 39 Evolution de l'épaisseur fluidisée  $E_f$  avec  $\Gamma$  calculée avec une vitesse critique  $v_c=0,18. \text{ mm s}^{-1}$  pour deux empilements vibrés respectivement à 50 et 85 Hz. [49]

Concernant l'influence de la fréquence, l'évolution de l'épaisseur fluidisée  $E_f$  (couche mobile de vitesse supérieure à une vitesse critique  $v_c$ ) en fonction de  $\Gamma$  suggère que celle-ci semble être faible, du moins dans l'intervalle 50-85 Hz.

### III.B.1.b Influence de l'accélération $\Gamma$ et de la fréquence $f$ sur la densité

Les explications rencontrées dans la littérature sur le procédé de densification par vibrations verticales et horizontales sont de natures sensiblement différentes. Nous présentons donc séparément les deux cas sur lesquels nous considérons l'influence des mêmes paramètres : fréquence et accélération.

III.B .1.b.i Cas des vibrations verticales :

Tout d'abord, dans le cas des vibrations verticales et dans une gamme de fréquence allant de 20 à 80  $Hz$ , les densités maximales sont observées pour des accélérations relativement faibles. En effet, les densités les plus fortes sont obtenues pour une accélération relative  $\Gamma$  proche de 1. Entre 80 et 100  $Hz$ , les densités maximales sont obtenues pour  $2 < \Gamma < 3$  (Figure 40, [36]). Si l'on observe l'évolution de la densité en faisant varier  $\Gamma$  progressivement, on constate l'apparition de cycles d'hystérésis comme présenté Figure 41 [78]. Sur la branche irréversible, on part d'une densité faible qui augmente progressivement et atteint un maximum pour  $\Gamma_{crit}=3$ . La densité diminue ensuite progressivement quand  $\Gamma$  est encore augmenté. A partir d'une forte valeur de  $\Gamma(\Gamma>4)$ , on se trouve sur une branche réversible. Les densités obtenues initialement ne seront plus retrouvées. Quand l'accélération décroît de nouveau, les densités finales obtenues deviennent très fortes : cette branche est réversible et on reste sur cette courbe si l'on opère des cycles d' « augmentation/diminution » de  $\Gamma$ . Quant à la densité locale, elle semble être homogène (Figure 41, Figure 42). Pour des faibles accélérations, le profil de compacité dépend de l'histoire du milieu granulaire. Si une faible accélération est appliquée à un empilement homogène de densité modérée, on observe un gradient de densité. Le « front de densification » pourrait ne pas atteindre les couches supérieures où la densité reste plus basse (Figure 43 :  $\Gamma=1.2$  [36]) : ce point qui est en contradiction avec les résultats de Nowak [78] reste à vérifier.

Notons que suivant l'accélération, il y a une compétition entre une baisse globale de la compacité due à la fluidisation des couches de surface et un gain de compacité due à la compaction des couches profondes. Sur la branche réversible du cycle d'hystérésis, les réarrangements des couches profondes dus à une forte accélération ( $\Gamma_{crit} > 3,5$ ) restent acquis. Il s'ajoute à ceux-ci des réarrangements de surface lorsque l'accélération est baissée progressivement. Ainsi, la densité est très supérieure vers les faibles valeurs de  $\Gamma$  sur la branche réversible du cycle d'hystérésis (Figure 43).

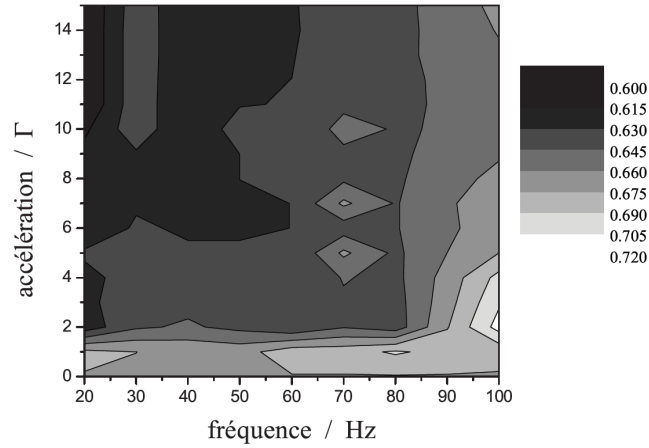


Figure 40. Diagramme fréquence/accélération de la densité relaxée d'un sable soumis à des vibrations verticales dans un récipient cylindrique. Diamètre moyen des grains  $\langle d_g \rangle = 660 \mu\text{m}$ . Diamètre du cylindre  $D = 28 \text{ mm}$ . Hauteur initiale de sable  $H_{ini} = 30 \text{ mm}$  [36]

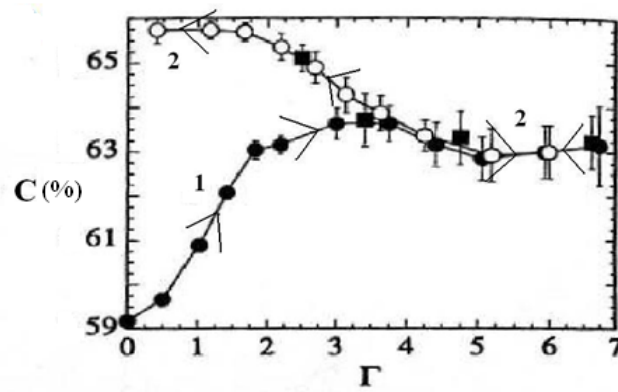


Figure 41. Evolution de la densité en vibrations verticales suite à une variation progressive de l'accélération  $\Gamma$ .  $10^5$  sollicitations ont été imposées pour déterminer chaque point. Billes de verre de 2 mm. Diamètre du cylindre :  $D = 18 \text{ mm}$ . Hauteur initiale de sable  $H_{ini} = 830 \text{ mm}$  [78]

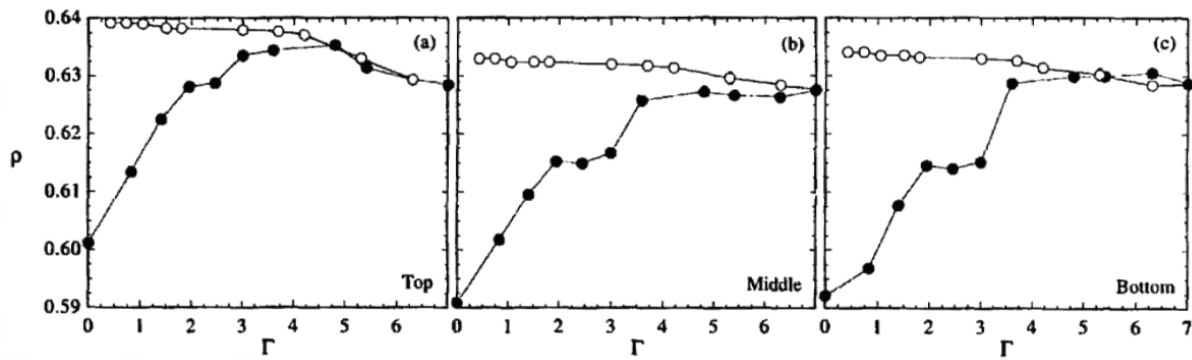


Figure 42. Variation de la densité en fonction de l'altitude Top :  $z=32$  mm. Middle :  $z=49$  mm. Bottom :  $z=68$  mm [78]

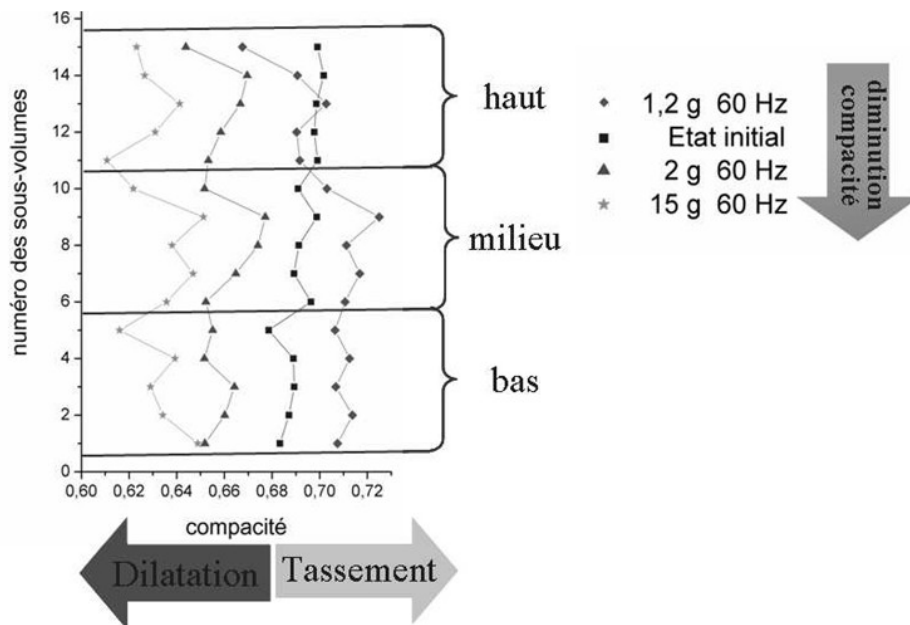


Figure 43 Profil de densité en fonction de l'altitude pour un milieu granulaire vibré verticalement et pour différentes valeurs de  $\Gamma$ . Echantillons cylindriques d'une hauteur de 14 mm et d'un diamètre de 13 mm. (bas :  $z \approx 3,5$  mm, milieu :  $z \approx 7$  mm, haut :  $z \approx 10,5$  mm)

### III.B .1.b.ii Cas des vibrations horizontales

Tout d'abord, signalons que l'influence de la fréquence sur la densité a été peu étudiée même si l'on peut penser que celle-ci est faible dans la fourchette 40-100 Hz comme le laisse supposer les mouvements de grains qui diffèrent très peu dans cette zone (Figure 27 et Figure 39). Par contre, l'influence de l'accélération  $\Gamma$  sur la densité locale et

globale a été analysée de manière exhaustive par Raihane [49]. Trois périodes peuvent être distinguées ; avant vibrations, pendant vibrations, après vibrations. Cela nous conduit à adopter les notations suivantes : on notera la densité initiale  $C_{ini}$ , la densité pendant les vibrations  $C_{vib}$  et la densité après relaxation  $C_{relax}$  (arrêt des vibrations). Lorsque les grains sont déposés « en vrac » (dépôt rapide à l'aide d'un entonnoir), Raihane ([49], Figure 44) obtient des densités initiales de  $61,5 \pm 0,5 \%$  (empilement lâche). Lorsque ces empilements de faible densité sont soumis à une accélération  $\Gamma$ , la densité à l'état relaxé augmente pour atteindre un maximum de  $67 \%$  à  $\Gamma \approx 4$ . La densité augmente à l'arrêt des vibrations. Ce gain de densité entre l'état vibré et relaxé varie de  $0 \%$  pour  $\Gamma=1$  à  $2,5 \%$  pour  $\Gamma=6$ . Si l'accélération évolue progressivement, on observe (comme dans le cas des vibrations verticales) l'apparition d'un cycle d'hystérésis (Figure 45, [49]).

L'interprétation est différente de celle des vibrations verticales. En effet, ce sont cette fois les couches supérieures de l'empilement qui sont compactées pour les faibles accélérations. Pour les fortes accélérations, les couches inférieures sont compactées alors que les couches supérieures très mobiles sont décompactées (Figure 46). Quand on part d'un état où l'accélération est forte et que l'on diminue progressivement l'accélération (de droite à gauche sur la branche réversible Figure 45), les couches du fond sont déjà compactées et gardent leur forte densité. De plus, les couches supérieures sont elles aussi peu à peu compactées en diminuant l'accélération. Ainsi, comme dans le cas des vibrations verticales, on obtient les densités les plus fortes pour les faibles valeurs de  $\Gamma$  sur la branche réversible.

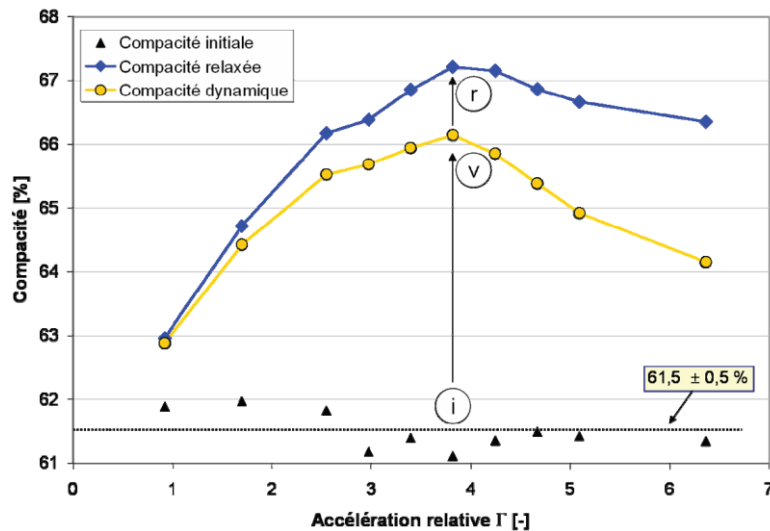


Figure 44 Evolution de la densité en fonction de  $\Gamma$  pour un milieu granulaire initial lâche ( $C_{ini} \approx 61,5\%$ ). Sont présentées la densité initiale (i), vibrée (v) et relaxées (r).  $H_{ini}=60\text{ mm}$ ,  $L_x=40\text{ mm}$ ,  $L_y=80\text{ mm}$ . [49]

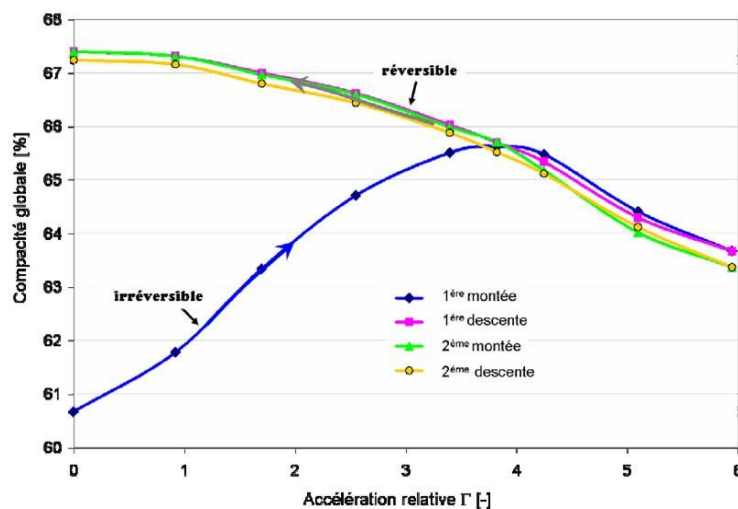


Figure 45 Evolution de la compacité vibrée  $C_{vib}$  en vibrations horizontales suite à une variation progressive de l'accélération  $\Gamma$ . Chaque point a été déterminé en régime stationnaire pendant vibrations.  $f=50\text{ Hz}$ .  $H_{ini}=60\text{ mm}$ ,  $L_x=40\text{ mm}$ ,  $L_y=80\text{ mm}$  [49]



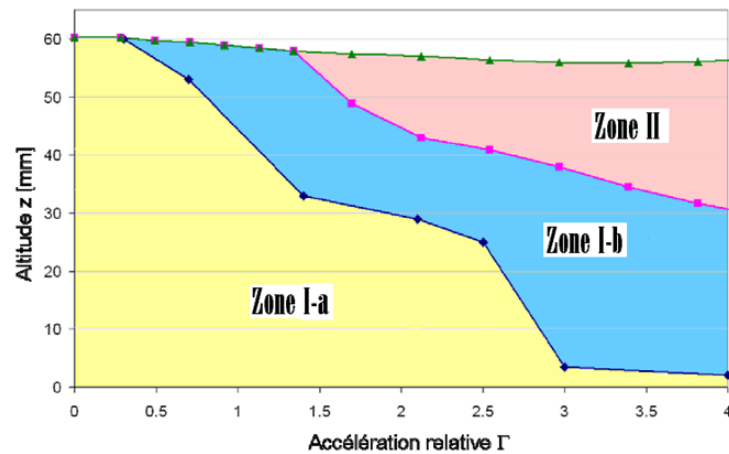


Figure 46. Diagramme des compacités relaxées en fonction de l'accélération délivrée et de l'altitude  $z$  considérée. Zone I-a : zone inférieure solide,  $C = C_{ini}$  (entre 61 et 68 % selon le protocole de remplissage) Zone I-b : zone intermédiaire solide ( $C \approx 67-68\%$ ) Zone II : zone supérieure fluidisée ( $C < 64\%$ )

### III.B.2 Influence de la géométrie du récipient et de la nature des matériaux

#### III.B.2.a Taille du contenant et hauteur de l'empilement granulaire

##### III.B.2.a.i Cas des vibrations verticales

La taille du contenant dans lequel on vibre les grains a une forte influence sur le comportement du milieu granulaire. On remarque que dans la plupart des situations rencontrées, la taille des cellules de convection est proportionnelle au diamètre du récipient vibré en vibrations verticales (Elperin et al. [79], Figure 47) et horizontales (Tennakoon [66], Medved [80], Saluena [81], Raihane [48]). La largeur totale de la cellule de convection correspond à la moitié de la taille de la boîte vibrée. L'existence d'un nombre plus important de rouleaux est parfois constatée dans le cas de vibrations verticales [82].

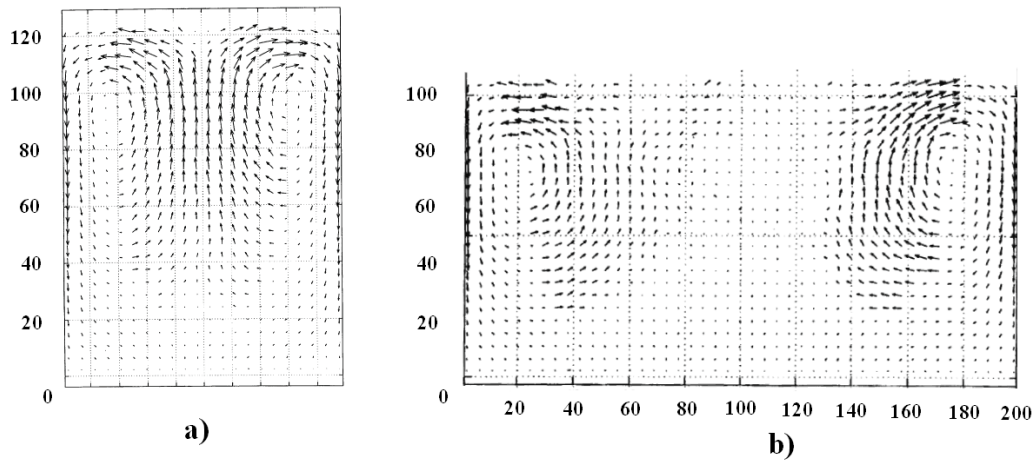


Figure 47 Cellules de convections obtenues en simulant des vibrations verticales pour 2 tailles de récipient ( a)  $L/d=100$  avec 700 grains et b)  $L/d=100$  avec 1200 grains ),  $\Gamma=4$  [81]

### III.B .2.a.ii Cas des vibrations horizontales

Nous nous proposons maintenant d'analyser l'influence de la longueur  $Lx$  de la boîte et de la profondeur des grains sur leurs mises en mouvement dans le cas des vibrations horizontales. Le raisonnement qui suit est basé sur l'article de Flemmer [83] qui examine les effets de vibrations horizontales sur un milieu granulaire contenu dans une trémie de chargement. Il trouve en particulier que l'accélération nécessaire pour déplacer les grains est plus faible quand la boîte est plus grande car les forces inertielles dans le milieu granulaire sont d'autant plus grandes que la boîte est grande. Il trouve aussi que la mise en mouvement est d'autant plus difficile que la couche de grains considérée est profonde. La démonstration s'appuie sur la théorie de Rankine (Annexe D, [25]).

Flemmer considère une boîte de base carrée de côté  $W$ , de hauteur  $H$ , contenant un milieu granulaire soumis à une accélération  $\vec{A}$  (Figure 48). Il calcule la pression appliquée latéralement pour accélérer les grains (pression active), en supposant qu'ils forment un bloc solide :

$$P_a HW = MA. \text{ Or } M = \rho V \text{ et } V = HWW. \text{ D'où}$$

$$\boxed{\Rightarrow \sigma_{xx} = P_a = \rho WA} \quad (\text{III-13})$$

On note  $P_p$  la pression passive, ou plus explicitement, la composante verticale de la contrainte dans le milieu granulaire assimilée à une pression hydrostatique. A une profondeur  $y$ , on a en première approximation :

$$\sigma_{yy} = P_p = \rho g y \quad (\text{III-14})$$

D'après la théorie de Rankine des sols (Annexe D) le milieu granulaire reste stable si :

$$\kappa_A < \frac{P_a}{P_p} < \frac{1}{\kappa_A} \quad (\text{III-15})$$

Où  $\kappa_A = \frac{1 - \sin \Phi}{1 + \sin \Phi}$  est le coefficient de pression active de Rankine,  $\Phi = \arctan(\mu_s)$  avec  $\mu_s$  le coefficient de friction statique du milieu granulaire. On observe uniquement la partie droite de l'inégalité soit la rupture passive due à l'accélération de la paroi (une rupture active correspondrait à un effondrement des grains sur eux-mêmes). En remplaçant par les valeurs de  $P_a$  et  $P_p$ , le critère de cisaillement devient :

$$A > \frac{1}{\kappa_A} \frac{g y}{W} \quad (\text{III-16})$$

L'accélération critique conduisant au cisaillement est proportionnelle à la profondeur  $y$  et inversement proportionnelle à la taille de la boîte  $W$ . De cette équation, on peut déduire deux propriétés :

- Plus la couche considérée est profonde, plus l'accélération nécessaire à la mise en mouvement est grande.
- Plus la largeur  $W$  de la boîte est grande, moins l'accélération nécessaire à la mise en mouvement est grande.

L'équation (III-16) est toujours vraie pour une très petite profondeur  $y$ . Le milieu granulaire serait donc toujours cisailé et toujours mis en mouvement quand  $y$  est petit, ce qui est physiquement discutable. Cette valeur  $y$  peut même être prise plus petite que la taille des grains, échelle à laquelle l'hypothèse de milieu continu ne tient pas. On peut résoudre ce problème en introduisant la valeur  $y_{crit}$  à partir de laquelle l'équation (III-16) reste valable [83].

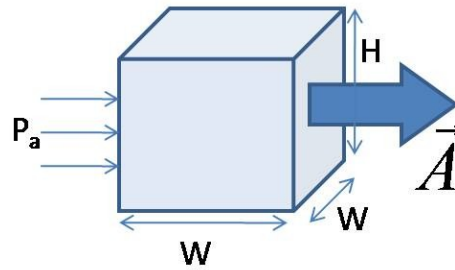


Figure 48. Représentation schématique d'une boîte à base carrée contenant un milieu granulaire et soumise à une accélération horizontale

### III.B .2.a.iii Influence de la hauteur initiale de l'empilement sur l'épaisseur fluidisée et la vitesse des grains

Nous avons vu dans le paragraphe précédent que la mise en mouvement des grains dépend de leur profondeur. Nous allons maintenant considérer l'influence de la hauteur initiale de l'empilement granulaire sur la vitesse de déplacement des grains dans le cas des vibrations horizontales.

Nous pouvons remarquer que la vitesse de chute dépend de manière importante de la hauteur de l'empilement (Figure 49). Pour de petites hauteurs, on peut d'ailleurs remarquer que la vitesse maximale des grains augmente linéairement avec la hauteur de sable (Figure 49). On peut supposer l'existence d'un plateau pour des grandes hauteurs de sable car les grains ne peuvent pas tomber durant un temps plus grand que celui correspondant à un cycle de vibrations. Ils sont en effet « happés » par le paquet de grain à chaque vibration. Raihane note aussi que plus grande est la hauteur initiale de l'empilement, plus grande sera l'épaisseur de la zone fluidisée. On peut expliquer ce phénomène par l'effet bloquant de la paroi du fond. En effet, au fond de la boîte, les vitesses de chute sont forcément nulles : les grains se trouvent bloqués dans leur chute. Augmenter la hauteur de sable permet donc de pouvoir considérer des hauteurs de chutes plus grandes sur lesquelles les grains sont accélérés par la pesanteur : ceux-ci atteignent donc des vitesses potentiellement plus élevées.

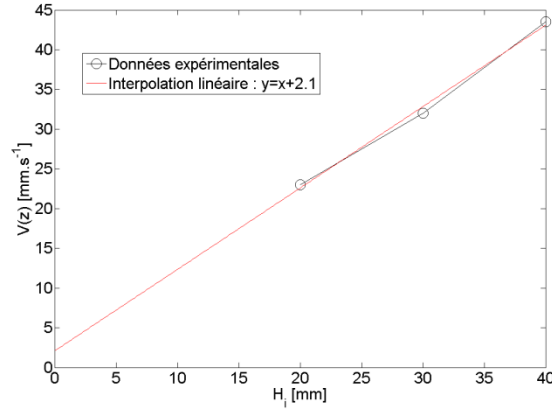


Figure 49. Evolution de la vitesse en face Nord en fonction de la hauteur initiale pour  $\Gamma=5.1$  et  $f=50$  Hz (tracé à partir d'informations extraites de [49])

L'épaisseur fluidisée varie dans le même sens que la hauteur initiale de grains (relation de proportionnalité pour des petites hauteurs initiales  $H_{ini}$ ). Nous expliquons encore ce phénomène par le facteur limitant de la paroi du fond. En effet, Raihane (Figure 50, [49]) constate l'existence d'une courbe maîtresse déterminant l'épaisseur fluidisée en fonction de  $\Gamma$  (évolution logarithmique). Mais celle-ci est plus faible pour des hauteurs de sable faibles. Ceci se comprend aisément si l'on considère le cas limite où l'ensemble du milieu granulaire est déjà fluidisé. Augmenter encore l'accélération ne peut alors pas conduire à une épaisseur fluidisée plus grande.

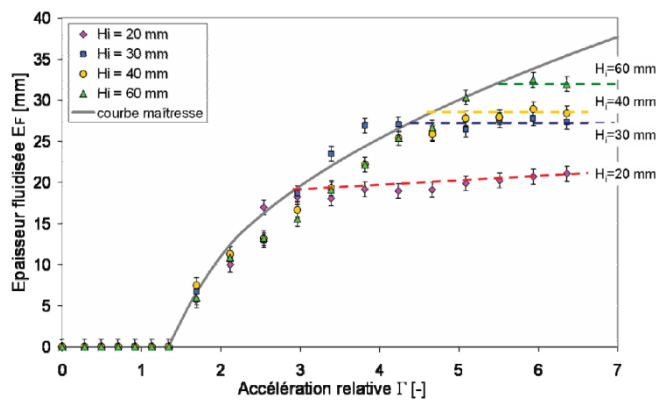


Figure 50. Variation de l'épaisseur fluidisée  $E_F$  en fonction de  $\Gamma$ .  $E_F$  est calculée pour une vitesse critique  $v_c=0.18$  mm.s<sup>-1</sup> pour des empilements de hauteur initiale  $H_{ini}$  variables mais de même densité initiale  $C_i \approx 60$  % vibrés à une fréquence de 50 Hz [49]

### III.B.2.b Taille des grains

Peu d'études portent sur l'influence de la taille sur la vitesse des grains soumis à des vibrations. On notera l'expérience de Raihane (Figure 51, [49]) qui observe l'effet de la nature des grains ( $d_g=517 \text{ mm}$ , grains arrondi<sup>1</sup> et  $d_g=393 \text{ mm}$ , grains peu anguleux<sup>1</sup>). Raihane déduit de cette expérience que l'épaisseur de la couche de grains mobile augmente avec la taille des grains. Cette conclusion reste à vérifier car dans son expérience, les grains étaient de forme différente et de ce fait, il est difficile d'affirmer qui de la forme ou de la taille des grains joue le plus sur cette variation d'épaisseur fluidisée.

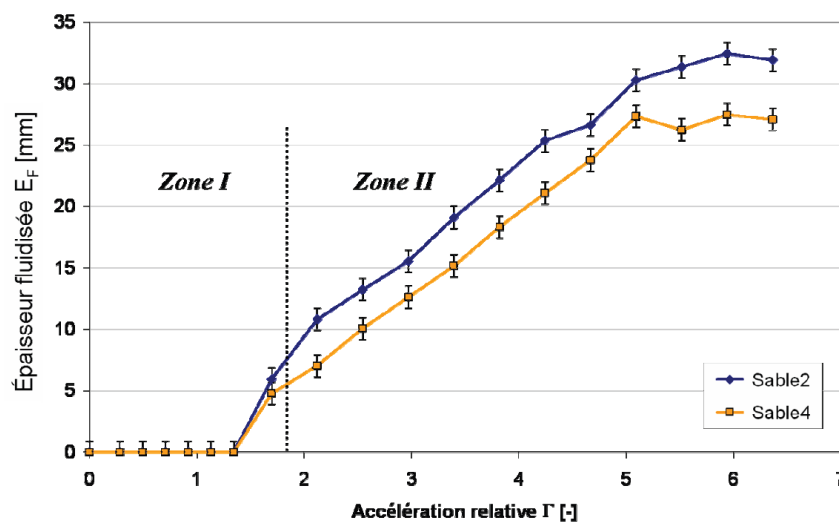


Figure 51. Influence du type de sable sur l'épaisseur fluidisée. Sable 2 :  $d_g=517 \text{ mm}$ , arrondi<sup>1</sup>. Sable 4 :  $d_g=393 \text{ mm}$ , peu anguleux<sup>1</sup> [49]

### III.B.2.c Coefficient de friction

Il apparaît dans la littérature [85] que le coefficient de friction entre les grains et les parois jouent un rôle important sur la vitesse de convection des grains. En particulier dans le cas des vibrations horizontales, la vitesse de convection aurait tendance à croître avec le coefficient de friction entre mur et grains  $\mu_{g/m}$  (Figure 52, [85]). Cette assertion qui a été formulée par Hsiau en vibrations verticales reste à vérifier en vibrations horizontales.

<sup>1</sup>selon l'échelle introduite par Powers [15]

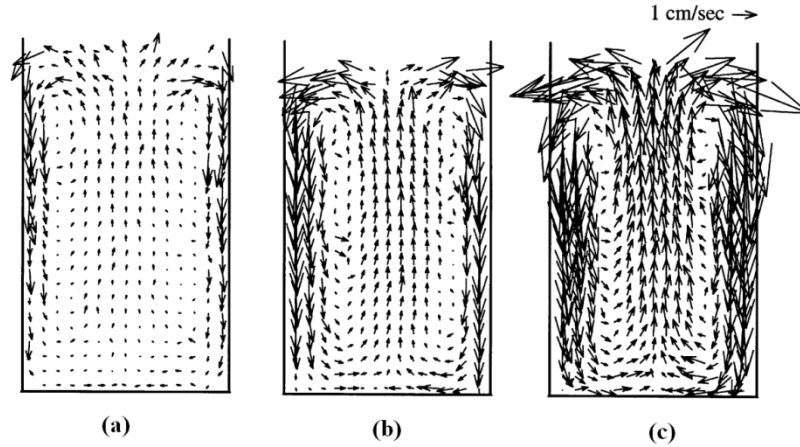


Figure 52. Influence de la rugosité des parois sur les cellules de convection et la vitesse de déplacement des grains dans la cellule de convection. Coefficient de friction statique entre mur et grains  $\mu_{g/m}$  : (a) :  $\mu_{g/m} = 0,15$  , (b) :  $\mu_{g/m} = 0,55$  , (c) :  $\mu_{g/m} = 0,68$  [85]

L'influence du coefficient de friction est aussi importante sur les densités. Vandewalle *et al.* [86] montre numériquement et expérimentalement qu'il y a un lien direct entre le coefficient de friction inter-grains  $\mu_{g/g}$  et les densités finales et initiales obtenues. Les plus fortes densités sont obtenues pour des valeurs de  $\mu_{g/g}$  faibles. On peut expliquer ces résultats par une possibilité de réarrangement des grains certainement plus grande quand la friction est faible.

## Conclusion du Chapitre III

Une partie de la phénoménologie d'un milieu granulaire vibré horizontalement a déjà été décrite assez précisément, notamment par Raihane dans ses travaux. On note de grandes similarités de comportements dans le cas des accélérations verticales et horizontales. En particulier, la présence de rouleaux de convection similaires dans les deux situations et une même influence de l'accélération  $\Gamma$  sur les densités et sur la mobilité des grains.

L'influence de la taille de la boîte et des coefficients de friction a été très peu étudiée. Il reste à les caractériser de manière plus précise dans le cas des vibrations horizontales.

Des études ont déjà été entreprises sur la dissipation d'énergie d'un milieu granulaire vibré verticalement mais l'étude de la dissipation d'énergie d'un milieu granulaire vibré horizontalement reste totalement à effectuer.

Enfin aucune étude paramétrique du remplissage sous vibrations horizontales d'un récipient fermé avec une alimentation par un orifice étroit n'a été publiée à notre connaissance.



## Conclusion de la partie 1

Suite à notre étude bibliographique, nous disposons déjà d'une somme d'informations permettant de mieux tendre vers le but industriel « Comment obtenir un remplissage dense et homogène », et académique « Quels facteurs permettent d'optimiser la compacité d'un milieu granulaire vibré ».

En particulier l'existence d'un cycle d'hystérésis sur le graphique donnant la densité en fonction de  $\Gamma$  permet d'envisager une méthode de densification plus efficace en vibrations verticales et horizontales. Cette méthode consisterait à diminuer progressivement l'accélération en partant d'une accélération très élevée (état de perte totale de la « mémoire » du milieu granulaire : l'empilement est totalement réarrangé de manière aléatoire). La diminution progressive jusqu'à l'arrêt total des vibrations s'effectue sur une branche réversible de la courbe compacité-accélération. Dans le cas des vibrations horizontales, une autre possibilité s'offre à nous car à faible accélération, seules les couches supérieures sont compactées. Ainsi, en introduisant progressivement des grains dans la boîte vibrée, on compacterait couche par couche l'ensemble des grains.

On note aussi l'existence de diagrammes accélération/fréquence permettant d'anticiper les meilleures combinaisons pour une densification efficace, en particulier dans le cas des vibrations verticales. Néanmoins, cette approche reste sujette à caution car nous pouvons observer que des paramètres aussi différents que la taille des grains, les dimensions de la boîte vibrée, la hauteur de grains ou encore le coefficient de friction aux parois jouent sur le comportement du milieu granulaire. Les fusibles industriels sont de tailles variées et contiennent des sables de différentes natures. Ainsi, une transposition directe des résultats qui seraient optimaux dans une configuration géométrique précise n'est pas possible. L'influence de la géométrie de la boîte sera donc étudiée dans cette étude. De plus, afin de mieux caractériser l'influence des paramètres de vibrations, l'outil de modélisation permettra d'accéder à des données comme la *compacité locale* de manière plus précise.

Nous imaginons deux façons de prévoir le comportement d'un empilement de grains de sable dans un récipient similaire à un corps de fusible. La première est l'utilisation d'un outil de modélisation éprouvé implémentant par exemple la méthode des éléments discrets. La deuxième est l'établissement de lois d'échelles (ou au moins de

tendances) permettant de déterminer le comportement des grains pour une taille de grains et de boîte donnée.

Un élément majeur n'a pas encore été abordé : l'influence d'un obstacle sur l'écoulement, la compacité locale et globale du milieu granulaire. En effet, les fusibles contiennent de fines lames métalliques percées et le comportement des grains de sable est certainement fortement modifié par celles-ci. Des informations permettant de déterminer le comportement des grains en présence des lames doivent être recueillies. Notre attention se portera sur la capacité des grains à circuler dans des trous ou des sections d'aire réduite, comme celles qui peuvent exister dans le fusible.

L'influence d'un toit, paroi délimitant supérieurement le volume d'espace fermé offert au milieu granulaire, n'a pas non plus été étudié, mais reste très importante d'un point de vue pratique du fait de sa présence dans le dispositif industriel étudié. D'un point de vue théorique, la compaction d'un milieu granulaire confiné soumis au champ de pesanteur n'a à notre connaissance pas non plus été étudiée et présente l'intérêt de comparer les comportements du milieu granulaire en milieu ouvert et fermé.

Enfin, la possibilité d'évaluer la dissipation d'énergie dans le milieu granulaire à l'aide d'un capteur de force et d'un accéléromètre nous semble intéressante. Nous nous attacherons à déterminer s'il existe un lien entre la dissipation d'énergie dans le milieu granulaire et la qualité du remplissage et en envisagerons les possibles applications industrielles.





## Deuxième partie :

# Matériel et Méthode

Deux types d'études sont mises en œuvre afin d'analyser le procédé de compaction granulaire par vibrations horizontales : des études expérimentales et numériques.

Les études expérimentales nécessitent en premier lieu un système de vibration (pot vibrant, plateau coulissant, boîte). En plus, afin de caractériser l'état du milieu granulaire, nous avons été amenés à utiliser les systèmes suivants :

- une caméra ultra-rapide couplée à un logiciel de PIV (Particle Image Velocimetry) permettant de visualiser les champs de vitesse
- un profilomètre optique permettant de mesurer la compacité globale de l'empilement
- un système de tomographie X permettant de visualiser les compacités locales dans le milieu granulaire

Nous caractériserons aussi les principaux matériaux utilisés : les sables fournis par l'industriel MERSEN.

Les simulations s'appuient sur la méthode des éléments discrets en utilisant le logiciel PFC3D d'Itasca. Un travail de codage et d'algorithmique spécifique est nécessaire afin de pouvoir obtenir des résultats précis sur des paramètres qu'on corrélera lorsque cela sera possible aux mesures expérimentales. Les paramètres les plus pertinents sont :

- La mesure de la compacité locale et globale
- La mesure du champ de contraintes
- La mesure du champ de vitesses

Nous détaillerons les grandes lignes et quelques subtilités des algorithmes mis en place. Nous pouvons mentionner les notions de vitesse de grains et de passage d'une visualisation lagrangienne à une visualisation eulérienne que nous avons dû implémenter.



## Chapitre IV Expériences mises en œuvre, matériaux et outils de caractérisation

### IV.A Dispositif expérimental

#### IV.A.1 Caractéristiques du système de vibration

Nous utilisons un pot vibrant électromagnétique de type S 50101 alimenté par un amplificateur de puissance de type BAA 1000-E de la société TIRA. Celui-ci est relié par un système de guidage (tige métallique) à une plaque métallique permettant de poser nos échantillons vibrés. Nous renvoyons le lecteur à [49] pour la description du système de guidage. Le pot vibrant ainsi que la table vibrante (système de guidage et support) sont fixés sur un support en aluminium d'une épaisseur de 3 *cm* peu sensible aux déformations pendant les vibrations. Le tout repose sur une table rigide par l'intermédiaire de 4 supports pneumatiques SE13 de marque PAULSTRA absorbant les vibrations parasites. La force maximale délivrée par le pot vibrant est de 650 *N*, l'accélération maximale est de  $\Gamma=51$ , la vitesse maximale de 1,5 *mm s<sup>-1</sup>* et l'amplitude de déplacement maximale de 50,8 *mm*.

Afin de générer des vibrations sinusoïdales, le pot vibrant est contrôlé par un générateur de signaux de type DSC4 de la société LING DYNAMIC SYSTEMS qui fonctionne avec un accéléromètre piézoélectrique de type 4371V de la société BRUEL&KJAER collé sur le pot vibrant ou la table vibrante (Figure 54). Grâce à cet accéléromètre, une boucle de rétroaction contrôle à tout moment l'écart entre l'accélération délivrée et l'accélération subie et corrige l'accélération délivrée en conséquence.

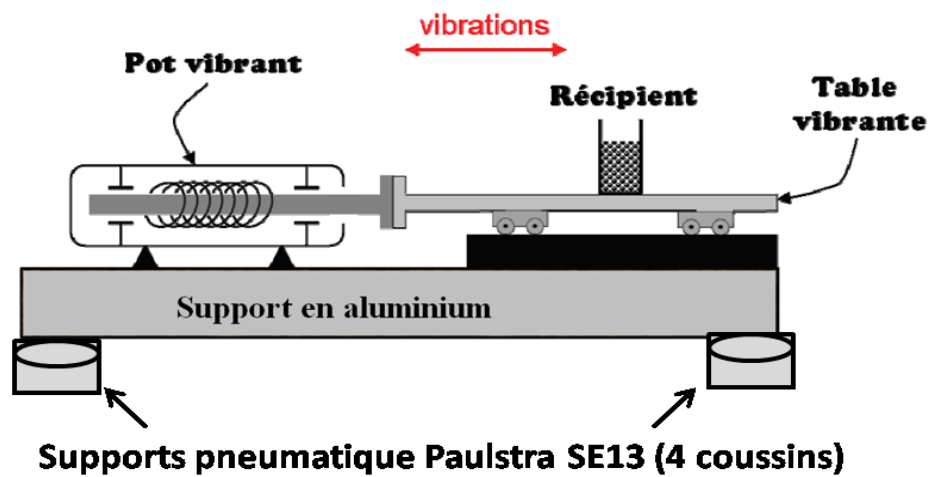


Figure 53. Représentation schématique du banc de vibration utilisé [49]

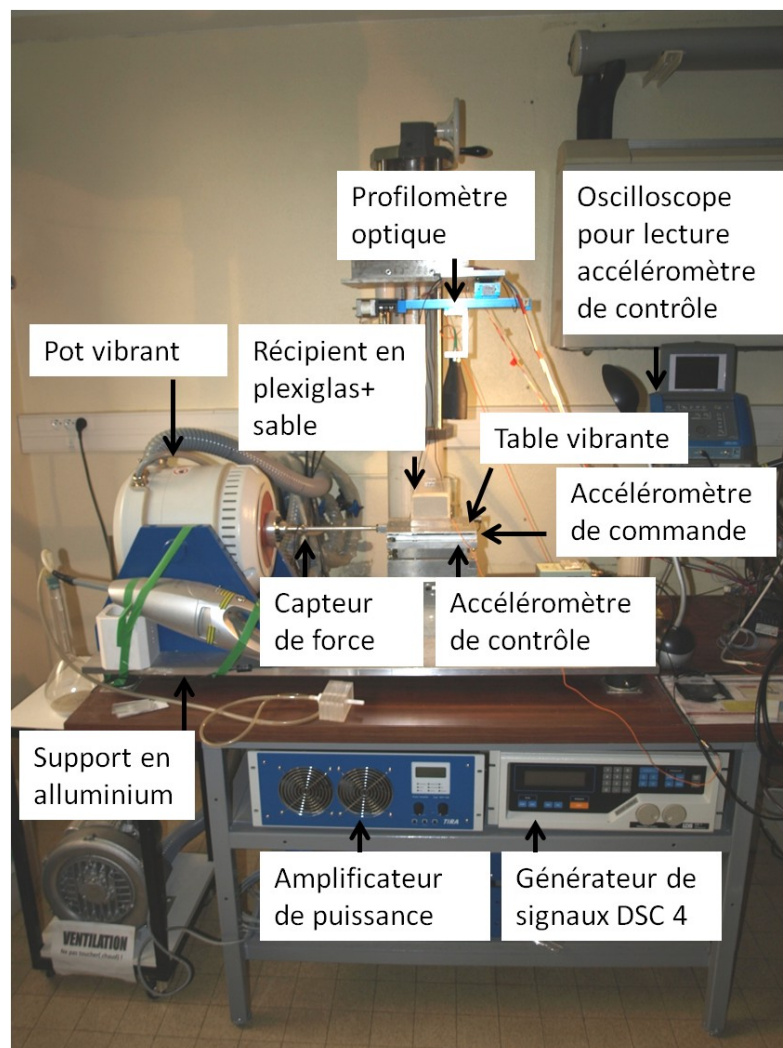


Figure 54. Montage expérimental



## IV.A.2 Caractéristiques des boîtes contenant les grains

La géométrie et les dimensions des boîtes contenant le matériau granulaire constituent des paramètres d'étude importants dans une expérience de compaction par vibration. La Figure 55 montre le positionnement d'une boîte parallélépipédique de dimensions  $L_x$ ,  $L_y$  et  $L_z$ . Nous avons utilisé une boîte de référence en plexiglas d'épaisseur 6 mm sur les faces Nord et Sud et 10 mm sur les faces Est et Ouest dont les dimensions intérieures sont  $L_x=40$  mm,  $L_y=80$  mm et  $L_z=80$  mm.

La forme parallélépipédique et les dimensions de la boîte de référence s'approchent de celle des fusibles du groupe Mersen pour lequel ont été entreprises ces recherches. Les mesures de compacité et de champs de vitesse sont faciles à réaliser sur une boîte parallélépipédique. Enfin, l'utilisation du plexiglas permet de constater par transparence les déplacements de grains à l'intérieur de la boîte (section IV.A.3 ). L'épaisseur du matériau (6 mm et 10 mm) permet d'avoir une boîte relativement rigide peu sensible à des vibrations parasites pendant les vibrations. Notons que les boîtes utilisées sont collées ou vissées sur le support de vibration.

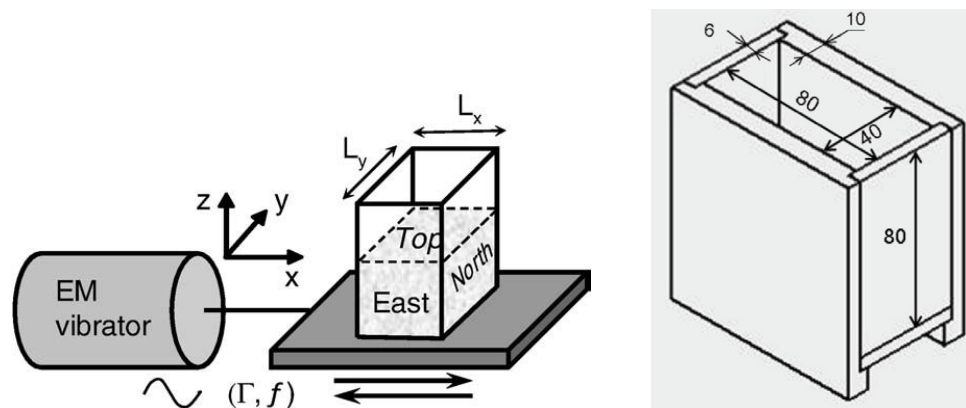


Figure 55. Représentation schématique de la boîte de référence vibrée et de ses dimensions caractéristiques (dimensions intérieures :  $L_x=40$  mm,  $L_y=80$  mm et  $L_z=80$  mm)

### IV.A.3 Acquisition d'images : utilisation d'une caméra CCD et du logiciel « *MOTION 2D* »

Afin d'étudier le mouvement des grains, nous utilisons un système d'acquisition constitué du logiciel Streampix de la société Norpix relié à une caméra EoSens CL MC1362 de Mikrotron avec objectifs interchangeables. Streampix permet en particulier de synchroniser la prise d'images avec la fréquence de vibration.

Le logiciel MOTION 2D de type PIV élaboré au sein de notre laboratoire [87] utilise une approche multi-échelle et la méthode de Lucas-Kanade [88] pour la détermination des champs de déplacement entre 2 images. La méthode de Lucas-Kanade se base sur deux hypothèses. Elle suppose que l'intensité lumineuse  $I$  d'un même objet ne varie pas de manière significative entre deux images successives :

$$I(x, y, t) = I(x + dx, y + dy, t + dt) \quad (IV-1)$$

Où  $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$  est le vecteur position et  $\begin{pmatrix} dx \\ dy \end{pmatrix}$  le vecteur déplacement du pixel considéré. Suite à un développement de Taylor, cette équation permet de déterminer l'équation dite du « flot optique » :

$$\frac{\partial I}{\partial x} v_x + \frac{\partial I}{\partial y} v_y + \frac{\partial I}{\partial t} = 0 \quad (IV-2)$$

Où  $v_x = \frac{dx}{dt}$  et  $v_y = \frac{dy}{dt}$ . Cette équation montre que la dérivée particulière de la fonction intensité le long du flot optique est nulle. L'équation (IV-2) comporte 2 inconnues  $v_x$  et  $v_y$ , et ne peut pas être résolue (système sous-déterminé). Pour lever l'indétermination, la méthode de Lucas-Kanade suppose que la vitesse reste constante au voisinage du pixel considéré. Ce voisinage est constitué d'une fenêtre d'observation  $W$ , de taille donnée par le nombre  $n$  de pixels, centrée sur le pixel  $(x, y)$ . Dans ce cas, en ordonnant les pixels de 1 à  $n$ , on obtient le système d'équations suivant :

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial I_1}{\partial x} & \frac{\partial I_1}{\partial y} \\ \frac{\partial I_2}{\partial x} & \frac{\partial I_2}{\partial y} \\ \vdots & \vdots \\ \frac{\partial I_n}{\partial x} & \frac{\partial I_n}{\partial y} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_x \\ v_y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{\partial I_1}{\partial t} \\ \frac{\partial I_2}{\partial t} \\ \vdots \\ \frac{\partial I_n}{\partial t} \end{bmatrix} = 0 \quad (\text{IV-3})$$

Le système d'équations précédent est surdéterminé et il est résolu en utilisant la méthode des moindres-carrés. Notons que la taille de la fenêtre influence de manière importante la détermination du flot optique. Une petite fenêtre permet de mieux constater les déplacements locaux. Une large fenêtre est plus robuste si l'on considère des grands déplacements. L'approche multi-échelle permet de s'affranchir du compromis fait par le choix de la largeur  $W$  de la fenêtre. Elle consiste à appliquer l'algorithme de Lucas-Kanade à différentes niveaux de résolution successivement appelés niveau de pyramide  $P$  [89]. Le niveau de pyramide  $P=0$  correspond à l'image initiale et lorsqu'on passe d'un niveau de pyramide d'ordre  $P$  à un ordre  $P+1$ , le nombre de pixels sur l'image est divisé par 2 dans le sens horizontal et vertical. Le flot optique est d'abord calculé à la résolution la plus faible (ordre le plus haut de pyramide). Ensuite, ces mesures à échelle grossière sont raffinés progressivement jusqu'à revenir sur l'image initiale ( $P=0$ )

La validation du logiciel par Raihane [49] a permis de montrer que le choix d'une largeur de fenêtre de trois taille de grains environ ( $W=3 <d_g>$ ) et un plus haut niveau de pyramide de niveau  $P=2$  eux permet d'obtenir des images de qualité satisfaisante pour suivre le mouvement des grains aux parois avec une précision de 90%.

#### IV.A.4 Fonctionnement du profilomètre optique et mesure de la compacité

Le profilomètre optique est un outil servant à déterminer le profil 3D de la surface libre du milieu granulaire. Il est composé d'un coffret optoélectronique (contrôleur) de type CHR 150 et d'un crayon optique monobloc de type OP24000 de la société STIL. Le principe de fonctionnement du profilomètre est l'imagerie confocale chromatique (brevet STIL) : une source de lumière blanche émet un faisceau qui est dirigée vers la surface du sable. La lumière réfléchiée est ensuite filtrée par un trou. Une seule longueur d'onde subsiste après le filtre, et celle-ci est directement liée à la distance entre la source et la

surface réfléchissante (<http://www.stilsa.com>, Figure 56). Ainsi, l'appareil délivre la position (altitude  $z$ ) du point considéré par rapport à une hauteur de référence fixée.

Le profilomètre est suspendu à deux systèmes de guidage linéaires perpendiculaires (MS25-LXB288 de la société DANAHER) permettant un déplacement dans un plan horizontal  $(0x, 0y)$ . Deux moteurs pas à pas de type HY2001717 alimentés par deux modules de puissance de type XL25i de la société PARKER permettent de déplacer les chariots des deux tables de guidage linéaire. Les modules de puissance sont connectés par une liaison série à l'ordinateur afin de contrôler les déplacements par l'intermédiaire d'un programme LABVIEW. Ce programme nous permet en retour de constater pour chaque point  $(x,y)$  la hauteur de sable  $z(x,y)$  mesurée par le profilomètre en régime statique et dynamique (la mesure est aussi possible pendant les vibrations). L'ensemble des point  $z(x,y)$  est ensuite stocké dans un fichier EXCEL ou un fichier de données (.dat). Ce fichier peut ensuite être traité avec le logiciel de traitement d'image ImageJ<sup>TM</sup> afin de calculer la compacité globale du milieu granulaire. Après un filtrage préalable (il peut y avoir des problèmes d'acquisition sur une partie importante des pixels, surtout ceux situés en bordure de l'empilement), on obtient une cartographie nette des altitudes (Figure 57). Celle-ci nous permet de déterminer le volume apparent  $V$  du milieu granulaire et la compacité se calcule alors simplement en fonction de la masse totale de sable introduite  $M_{sable}$  ainsi que la masse volumique des grains  $\rho_g$  :

$$C = \frac{M}{\rho_g V} \quad (IV-4)$$

Avec ce procédé, l'erreur estimée sur la mesure d'une compacité globale est de 0,5%.

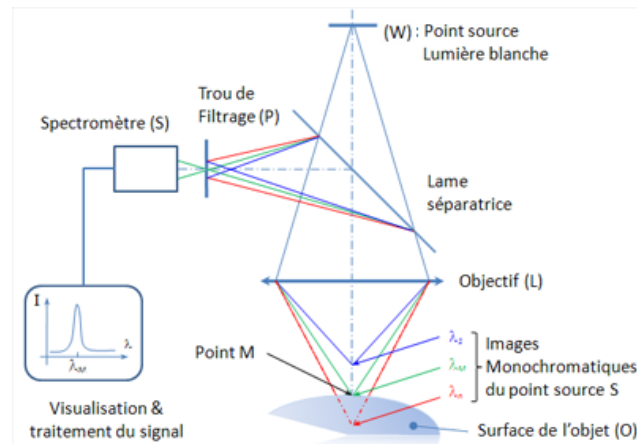


Figure 56. Représentation schématique du principe de l'imagerie confocale chromatique (<http://www.stilsa.com>)

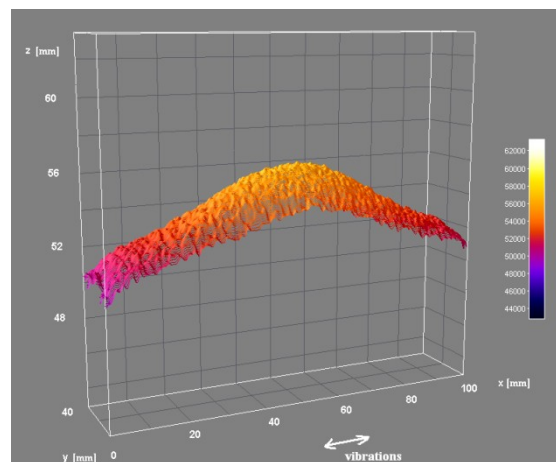


Figure 57. Exemple de profil d'altitude obtenu pour une boîte de dimensions  $L_x=100$  mm,  $L_y=40$  mm, et une hauteur initiale de sable  $H_{ini}=60$  mm après vibration à  $\Gamma=3$ ,  $f=50$  Hz. On constate un tassement global après vibration par rapport à l'état initial et la formation d'un dôme

#### IV.A.5 Principe de fonctionnement du microtomographe à rayons X

Le microtomographe Nanotom de Phoenix|Xray a été utilisé dans le but de mesurer les densités locales des empilements granulaires. Ces mesures n'ont pu être effectuées que pour des petites boîtes car des grandes dimensions auraient été incompatibles avec une résolution jugée nécessaire et suffisante ( $10 \mu m$  à comparer avec des tailles de grains de  $500 \mu m$ ) des images prises par le tomographe, et la limitation

stérique des objets dans l'espace de mesure. Les analyses tomographiques seront donc uniquement effectuées sur une boîte de dimension  $L_x=15\text{ mm} * L_y=15\text{ mm} * L_z=100\text{ mm}$ . Après un post-traitement des données, des informations telles que la densité, le nombre de contact moyen, la tortuosité, le squelette du réseau poreux, l'orientation préférentielle des particules peuvent aussi être extraites à l'aide de cet outil.

Le principe de fonctionnement du tomographe à rayon X est basé sur l'absorption des photons X par un objet. Selon la nature de l'objet, le faisceau de rayons X va être plus ou moins absorbé. L'intensité des faisceaux d'entrée  $I_{\text{entrée}}$  et de sortie  $I_{\text{sortie}}$  d'un objet sont liés par la loi de Beer-Lambert :

$$I_{\text{sortie}} = I_{\text{entrée}} \cdot \exp(-\mu \cdot \rho \cdot x) \quad (\text{IV-5})$$

Où  $\mu$  est le coefficient d'atténuation linéaire de la matière traversée,  $\rho$  la masse volumique de l'échantillon et  $x$  l'épaisseur de l'échantillon. L'objet peut tourner sur lui-même selon un angle  $\theta$ . Une série d'un millier d'images 2D (appelées « projections ») représentant l'atténuation du faisceau de rayons X est alors réalisée pour l'ensemble des angles  $\theta_i$  de 0 à 360° (incrément angulaire de 0,3°). Enfin, la reconstruction de l'image 3D est effectuée en utilisant l'algorithme établi par Feldkamp [90]. Sur la Figure 58 est donné le schéma global du mode de fonctionnement du microtomographe.

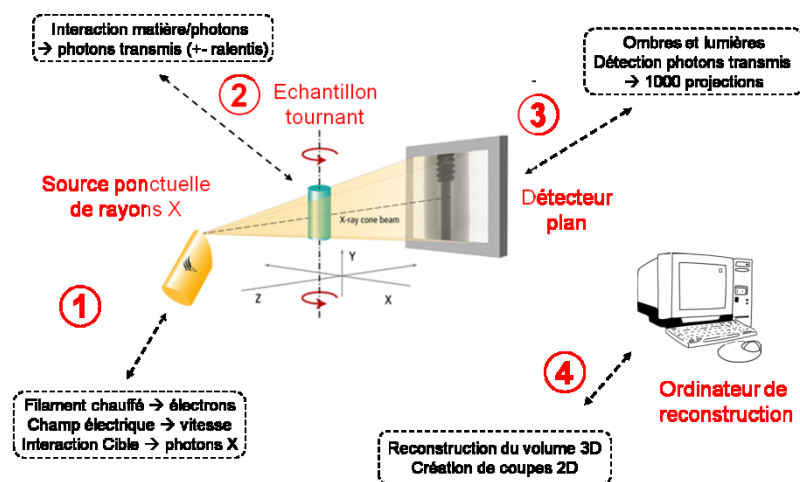


Figure 58. Représentation générale du fonctionnement du tomographe à rayons X

## IV.B Matériaux

### IV.B.1 Nature chimique des grains et densité

Une analyse par diffraction X a été effectuée et montre que le sable utilisé (référéncé sable 2 par MERSEN) est principalement composé de quartz alpha sous forme de réseau cristallin hexagonal compact (Figure 59). Aucune raie étrangère à ce composé n'apparaît dans le diffractogramme. Une analyse par spectrométrie de flamme [36] montre aussi que ce sable est principalement composé de silicium (98%).

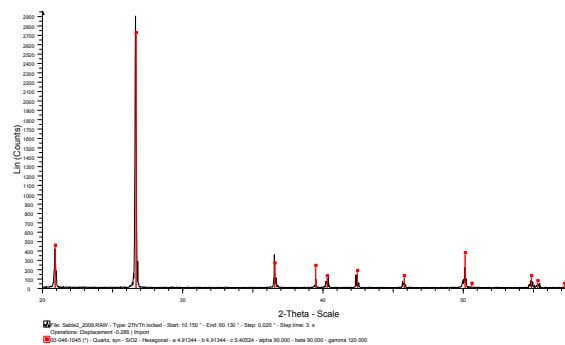


Figure 59. Analyse par diffraction X du sable référencé sable 2. L'analyse révèle que le sable est constitué principalement de silice « quartz alpha »

### IV.B.2 Masse volumique

La masse volumique du sable 2, mesurée par pycnométrie Hélium, est égale à  $2,652 \text{ g.cm}^{-3}$ . Cette valeur est très proche de celle du quartz alpha,  $2,65 \text{ g.cm}^{-3}$  et indique l'absence de porosité interne.

### IV.B.3 Morphologie des grains

Le comportement des grains peut être influencé par leur forme. Ainsi, il est important de connaître la forme des grains utilisés dans nos travaux expérimentaux. Une analyse au microscope électronique à balayage et une comparaison avec l'échelle de Powers nous montre que les grains usuellement utilisés (sable 2) peuvent être qualifiés de

peu arrondis. La sphéricité est difficilement quantifiable puisque le sable contient à la fois des grains très sphériques et des grains peu sphériques.

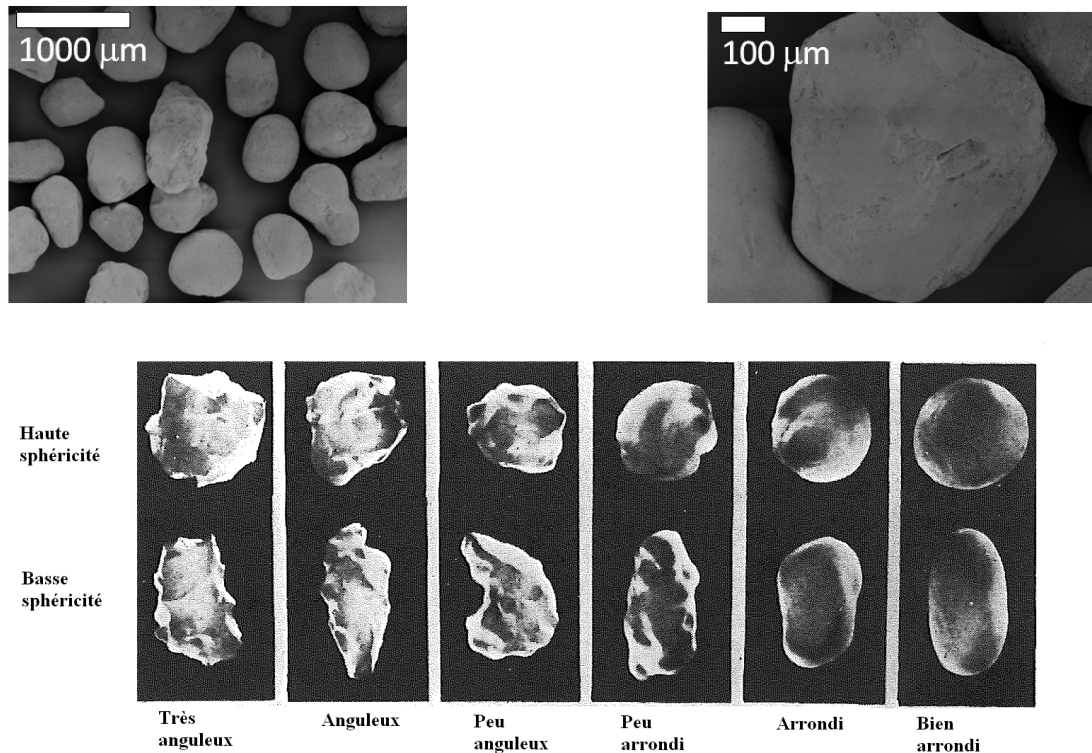


Figure 60. Images prises au microscope électronique à balayage. A gauche, grossissement de 33, à droite, grossissement de 110. En dessous, rappel de l'échelle de Powers [14]

#### IV.B.3.a Distribution granulométrique

Le granulomètre laser est un instrument se basant sur la diffraction de la lumière afin de mesurer les différentes tailles de grains en présence. Nous utilisons l'appareil Mastersize2000 de la société MALVERN qui permet d'obtenir la distribution granulométrique de grains allant de 2 à 2000  $\mu\text{m}$ . Les grains sont disposés sur un tapis vibrant qui les achemine devant un faisceau laser. Ce faisceau est alors diffracté. Des photodiodes sont disposées face au laser. La théorie de Fraunhofer permet le passage de la figure de diffraction à la distribution granulométrique.

Nous avons obtenu la distribution moyenne en nombre de la taille des grains pour trois lots de sable référencé sable 2 avec deux mesures réalisées sur chaque lot. On peut approximer cette distribution en nombre par une gaussienne centrée en 508  $\mu\text{m}$  avec un écart type de 122  $\mu\text{m}$ . L'écart type sur le diamètre moyen obtenu avec les six mesures



ainsi réalisées est de  $5 \mu m$ . Une meilleure approximation est donnée par une distribution asymétrique normale (skew normale)  $f$  centrée en  $\xi = 370 \mu m$  de dispersion statistique  $\omega = 216 \mu m$  et de travers (skewness)  $\alpha = 3,6 \mu m$  donnée par :

$$f(x) = \frac{2}{\omega} \Phi\left(\frac{x-\xi}{\omega}\right) \Phi_C\left(\alpha\left(\frac{x-\xi}{\omega}\right)\right) \quad (IV-6)$$

Où  $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right)$  est la fonction standard de densité de probabilité et

$\Phi_C(x) = \int_{-\infty}^x \Phi(t) dt$  est la fonction de répartition de  $x$ .

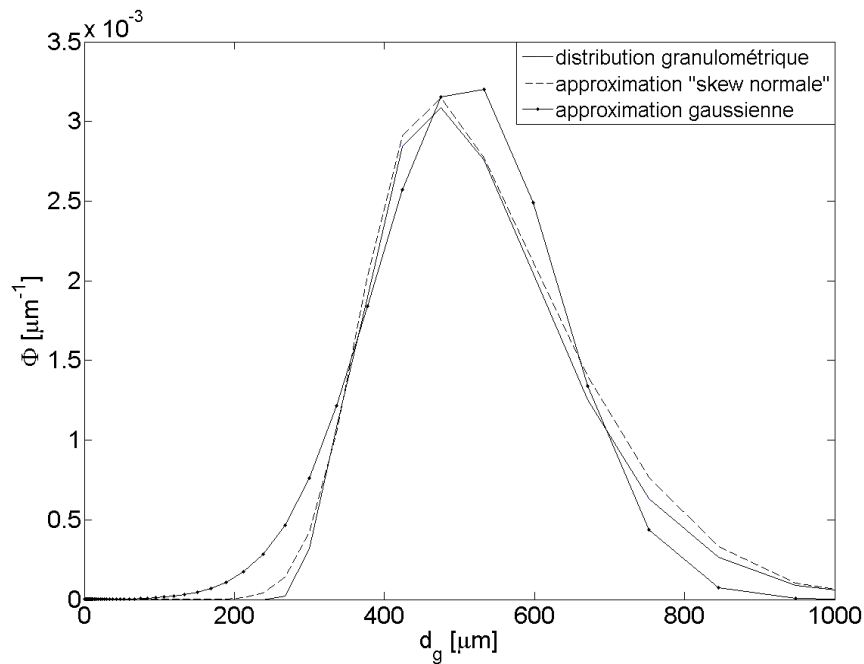


Figure 61. Distribution granulométrique en nombre du sable référencé sable2.

Interpolation gaussienne centrée en  $x = 508 \mu m$  avec un écart type  $\sigma$  de  $122 \mu m$ .

Interpolation « skew normal » centrée en  $\xi = 370 \mu m$  de dispersion statistique  $\omega = 216 \mu m$  et de travers (skewness)  $\alpha = 3,6 \mu m$

Des considérations plus classiques sont faites sur une distribution en volume des grains. Le  $d_{n\%}$  représente la taille en dessous de laquelle se trouve la fraction volumique de  $n\%$  des grains. La distribution  $d[4,3]$  correspond au diamètre moyen des grains en volume. Le span mesurant la largeur de la distribution est définie par la formule suivante :

$$span = \frac{d_{90\%} - d_{10\%}}{d_{50\%}} \quad (IV-7)$$

On obtient pour des valeurs moyennes sur les six mesures les données listées dans le tableau ci-dessous :

$d_{10\%}$	$d_{50\%}$	$d_{90\%}$	$d[4,3]$	span
421 $\mu m$	581 $\mu m$	806 $\mu m$	600 $\mu m$	0,66

Tableau 3. Bilan de la distribution granulométrique en volume du « sable 2 »

#### IV.B.3.b Cohésion et angle de friction interne

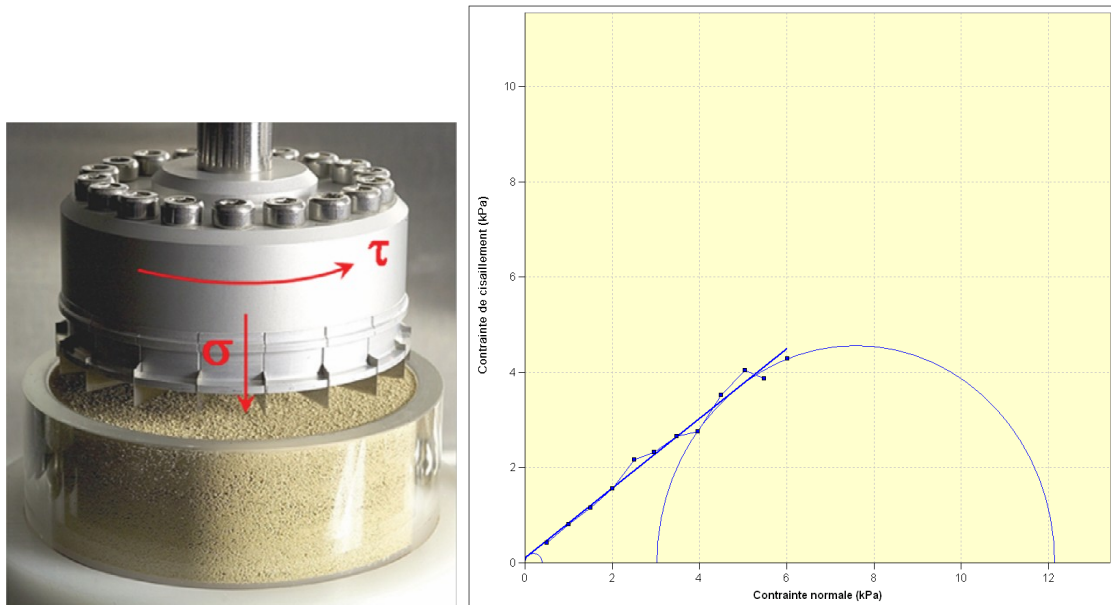


Figure 62. Cellule de cisaillement du rhéomètre à poudres FT4 et mesure obtenue sur sable référencé sable 2

Le coefficient de friction interne et la cohésion sont des caractéristiques importantes du milieu granulaire car ils déterminent en grande partie son comportement et peuvent être déterminés à l'aide d'un test de cisaillement. La cellule de cisaillement cylindrique constituée d'un piston palmé (Figure 62) permet de mesurer le rapport entre les forces de cisaillement et normale s'exerçant sur le sable. L'expérience consiste à appliquer une contrainte normale  $\sigma_N$  à un lit de sable et à déterminer la contrainte de

cisaillement  $\tau$  minimale pour laquelle il y a écoulement. Cette expérience est réalisée avec le rhéomètre à poudres FT4 de la société « Freeman Technology ». Nous avons effectué des mesures avec une telle cellule sur le sable utilisé dans nos expériences et référencé « sable 2 ». En faisant varier la force normale, nous obtenons une courbe dite des « lieux d'écoulement » (Figure 62, à droite). Nous interpolons cette courbe par une droite d'équation :

$$\tau = \mu_s \sigma + C \quad (\text{IV-8})$$

Où  $\mu_s$  est le coefficient de friction interne et  $C$  une contrainte de cohésion.

L'angle  $\theta_s$  tel que  $\theta_s = \arctan(\mu)$  est appelé l'angle de friction interne. A partir du graphique Figure 62, nous obtenons  $\mu_s = 0,75$ ,  $\theta_s = 37,0^\circ$ ,  $C = 0,1 \text{ kPa}$  (grains très peu cohésifs).

La friction entre les grains et les parois semble aussi être un élément influent lors d'une expérience de vibration (section III.B.2.c ). Nous avons donc mesuré le coefficient de friction grain/paroi en remplaçant la cellule de Jenike par des cylindres de différents revêtements (Teflon, Plexiglas, Toile Emeri) afin d'avoir des points de comparaison. Notons que les revêtements ont préalablement été légèrement abrasés avec le sable pour éviter les erreurs de mesures imputables à une paroi neuve (effets électrostatiques très forts pour des parois neuves). En effet, Raihane [49] constate une augmentation du coefficient de friction des parois en plexiglas neuves pendant les premières minutes de vibration. Pour des raisons de coût matériel, il nous est impossible d'utiliser constamment des parois neuves, nous avons choisis d'utiliser des parois vieilles dont le profil des aspérités est stationnaire.

Nous obtenons les résultats listés dans le tableau suivant pour des surfaces en téflon, plexiglas et toile Émeri :

	téflon	plexiglas	Toile Emeri
$\mu_{g/m}$	0,15	0,2	0,46

Tableau 4 . Coefficient de friction entre sable 2 et paroi mesuré par le rhéomètre FT4

Le coefficient de friction du plexiglas  $\mu_{g/plexiglass} = 0,2$  est donc relativement faible et proche de celui du téflon.

#### IV.B.3.c Coulabilité

L'indice de coulabilité du sable utilisé dans nos expériences et référencé sable 2 a été mesuré à l'aide de l'appareil FLODEX présenté dans la partie I.B.2.b.ii. On trouve que l'écoulement est possible à partir d'un diamètre d'orifice circulaire de  $2,5 \text{ mm}$ . Cela correspond à un indice de coulabilité  $\Omega = 4$ , typique d'un milieu granulaire très fluide.

#### IV.B.3.d Angle de Talus

Les angles de talus ont été mesurés à l'aide du dispositif présenté Figure 63. Il est constitué d'une boîte en verre de largeur  $L_x = 210 \text{ mm}$ , de hauteur  $L_z = 150 \text{ mm}$ , d'épaisseur  $L_y = 10 \text{ mm}$  et munie d'une ouverture carrée de longueur  $E = 10 \text{ mm}$  au centre de sa base. La boîte est d'abord bouchée et remplie entièrement, puis l'ouverture est débouchée et le sable s'écoule lentement en laissant deux tas dont l'angle  $\theta_t$  de la pente est appelé angle de talus à l'équilibre. On obtient finalement un angle  $\theta_t = 37,5^\circ \pm 1^\circ$  (Figure 64). Nous noterons que cette mesure coïncide avec la mesure effectuée au FT4 donnons pour angle de friction interne  $\theta_s = 37,0^\circ \pm 1^\circ$ .

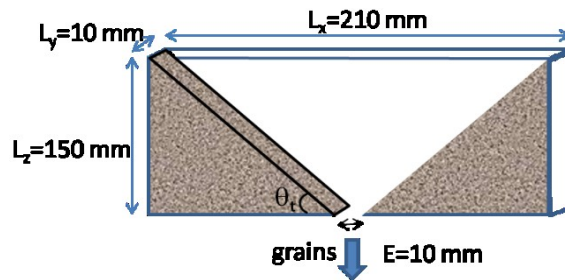


Figure 63. Schéma du dispositif pseudo 3D utilisé pour mesurer l'angle de talus



Figure 64. Mesure des angles de talus. Angle de talus  $\theta_t = 37,5^\circ$

## Conclusion du chapitre IV

Le dispositif expérimental mis au point permet trois contrôles majeurs :

- Délivrer des vibrations sinusoïdales contrôlées à une boîte contenant le milieu granulaire vibré.
- Mesurer la vitesse des grains à l'aide de la méthode PIV (Particle Image Velocimetry).
- Mesurer la densité à l'aide d'un dispositif de profilométrie optique ou d'un dispositif de tomographie X dans le cas de petites boîtes.

Les caractéristiques principales du matériau ont été déterminées :

- Le diamètre moyen des grains est de  $500\ \mu m$  en nombre avec un écart type de  $100\ \mu m$  et de  $600\ \mu m$  avec un span de 0,66.
- Les grains sont peu arrondis et de sphéricités diverses selon la classification de Powers [14].
- Les grains classiquement utilisés dans l'expérience sont essentiellement composés de quartz alpha.
- Ils présentent très peu de porosité interne, et la densité mesurée des grains est identique à celle du quartz alpha, soit  $2,65\ g.cm^{-3}$ .
- Le Flodex donne un indice de coulabilité de 4 qui caractérise un milieu granulaire très fluide.
- L'angle de talus des grains est de  $37,5^\circ$ , ce qui correspond à un angle de friction interne  $\mu_s=0,75$ . Un résultat très similaire est retrouvé avec le rhéomètre à poudre FT4.



## Chapitre V Stratégie de modélisation

Nous utilisons un logiciel basé sur la méthode des Eléments Discrets permettant de suivre des informations relatives à chaque grain au cours du temps (description lagrangienne). Le logiciel permet de mesurer différentes variables dans l'espace, les principales étant la vitesse des grains, leur rayon, leur position, les contraintes exercées par les obstacles voisins (paroi(s) ou grain(s)).

Pour des modélisations portant sur un grand nombre de billes ( $>10000$ ) et comptant de l'ordre de  $10^8$  itérations, le volume d'informations à stocker est considérable. De plus, nous nous intéressons davantage au mouvement d'ensemble qu'au mouvement respectif de chaque grain. Nous avons donc cherché à donner une description continue (eulérienne) de notre système. La partie qui suit décrit les notations et algorithmes utilisés pour définir les différents champs considérés : champ de vitesse, champ de compacité, champ de contrainte. D'autres champs en sont dérivés comme le champ de température granulaire, la densité de courant (produit de la vitesse par la compacité) et le champ de pression.

### V.A Discrétisation de l'espace et du temps

Nous présenterons ici les différentes notations liées à la discrétisation du temps et de l'espace.

Ensuite, nous présenterons comment les informations relatives à des grains individuels sont moyennées. Nous verrons que le référentiel considéré est important. Contrairement au logiciel de calcul qui se place dans un référentiel indépendant de la boîte vibrée, nous considérerons un référentiel lié à la boîte. De plus, le logiciel adopte une vision lagrangienne où chaque information (vitesse, densité, rayon de grain, ...) est liée à un grain. Nous verrons comment transformer ce point de vue en une vision eulérienne où les informations sont relatives à des points de l'espace fixes dans le repère de la boîte vibrée.

## V.A.1 Repérage temporel

Rappelons que le mouvement imposé au récipient est donné par une fonction sinusoïdale du type  $x=A\sin\omega t$  (III.A.1 ). On notera  $m$  l'indice permettant de numérotter les cycles d'oscillation. Pour une description temporelle, on notera (Figure 65) :

$$t = (m-1)T + \Delta t \quad (\text{V-1})$$

avec  $\Delta t \in [0, T]$ . Si le temps est discrétisé en divisant la période en  $N_T$  intervalles de temps égaux, on peut alors définir une position dans le temps grâce aux indices  $m$  et  $n$  :

$$t_{m,n} = (m-1)T + \Delta t_n \text{ avec } \frac{\Delta t_n}{T} = \frac{(n-1)}{N_T} \quad (\text{V-2})$$

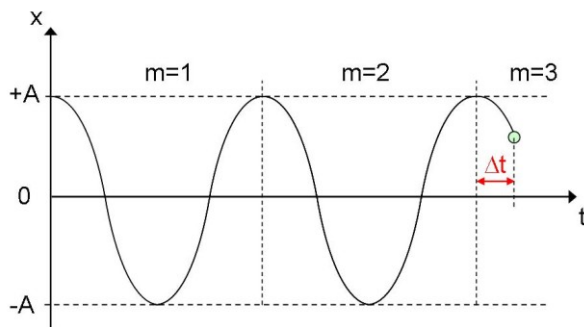


Figure 65. Repérage temporel

## V.A.2 Repérage dans l'espace

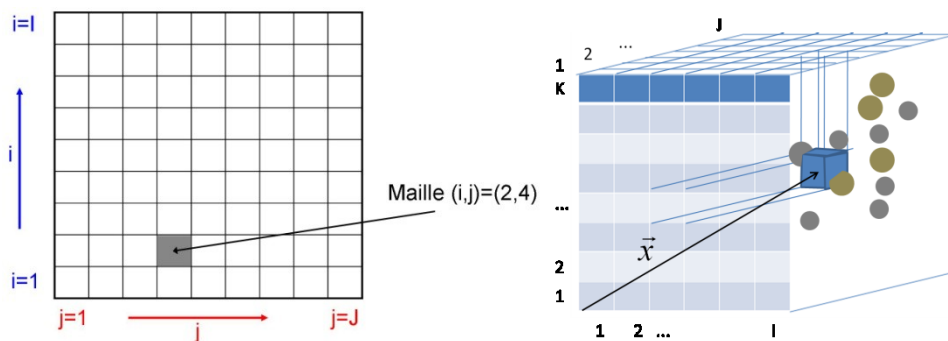


Figure 66. Représentation de l'espace maillé et des indices utilisés. A gauche, représentation 2D (face Est). A droite, représentation 3D.



L'espace est discrétisé avec un maillage cartésien. Le maillage forme une grille fixe dans le référentiel du récipient qui est divisé en  $I$  éléments sur la longueur  $L_x$ ,  $J$  sur la largeur  $L_y$  et  $K$  sur la hauteur  $L_z$  sur (Figure 66). En général, nous adoptons une vue face EST (Figure 67). Les coordonnées du centre du voxel  $V$  indicé  $(i,j,k)$  sont :

$$\begin{cases} x_i = (i - 0,5) \cdot \frac{L_x}{I} \\ y_j = (j - 0,5) \cdot \frac{L_y}{J} \\ z_k = (k - 0,5) \cdot \frac{L_z}{J} \end{cases} \quad (V-3)$$

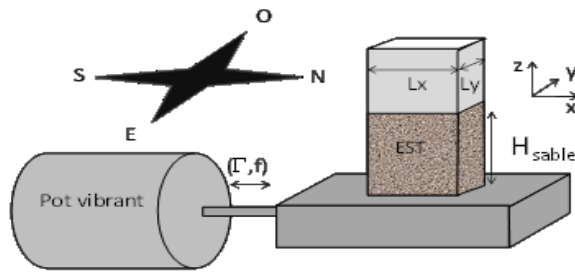


Figure 67. Rappel des notations sur l'orientation d'une boîte vibrée

Nous verrons que pendant les vibrations, il existe une zone de plus faible compacité entre les parois verticales Nord/Sud et le cœur de l'empilement granulaire [49]. L'épaisseur de cette zone étant de l'ordre de grandeur de quelques grains, il est judicieux de choisir une taille de maille de l'ordre de grandeur du diamètre des grains.

## V.B Description lagrangienne et description eulérienne

Rappelons que le logiciel que nous utilisons est basé sur la méthode des éléments discrets. Par la méthode décrite section II.A , ce logiciel calcule la trajectoire de chaque grain. A chaque instant, la position, la vitesse et les contraintes sont connues pour chaque grain. Les notations suivantes sont adoptées :

- $(x,y,z,t)$  : coordonnées de l'espace et du temps (dans le référentiel du récipient)
- $n$  : numéro du grain, compris entre 1 et  $N_g$  (nombre de grains)

- $m(n)$  et  $d(n)$  : masse et diamètre du grain  $n$  (scalaires)
- $\vec{x}(n,t)$  : position du grain  $n$  (vecteur à 3 composantes :  $x,y,z$ )
- $\vec{v}(n,t)$  : vitesse du grain  $n$  (vecteur à 3 composantes :  $v_x, v_y, v_z$ )
- $\sigma(n,t)$  : tenseur des contraintes propre au grain (matrice à 9 composantes :  $\sigma_{xx}, \sigma_{xy}, \dots, \sigma_{zz}$ )

Pour mettre en évidence le comportement macroscopique du milieu granulaire, nous transformons la description Lagrangienne en une description eulérienne. Dans la description eulérienne, le milieu granulaire sera considéré comme continu. A chaque instant  $t$ , les grandeurs suivantes seront associées à chaque point du récipient des valeurs de compacité, vitesses moyennes et instantanées, et tenseur des contraintes locales. Ensuite, on pourra moyenner ces valeurs sur plusieurs cycles de vibrations afin d'éviter la composante aléatoire due au caractère chaotique du comportement d'un milieu granulaire vibré. Cette moyenne s'effectuera en régime stationnaire ou pseudo/stationnaire, c'est-à-dire quand le comportement du milieu granulaire n'évolue plus ou très peu (section III.A.2 ) et dans ce cas on prendra comme origine des temps le début du régime stationnaire ou pseudo-stationnaire.

## V.B.1 Champ de compacité

Nous notons  $M(i,j,k)$  le volume occupé par la maille  $(i,j,k)$  et  $G(n,t)$  le volume occupé par le grain numéro  $n$  à l'instant  $t$ . Le volume de grains  $V_m$  présent dans la maille  $(i,j,k)$  à l'instant  $t$  est :

$$V_m = \sum_{n=1}^{N_c} Q[M_{(i,j,k)} \cap G_{(n,t)}] \quad (V-4)$$

Où la fonction  $Q[\Omega]$  est le volume du domaine  $\Omega$  et  $N_c$  le nombre de grains dans la case  $(i,j,k)$ . La compacité instantanée de la maille  $M(i,j,k)$  à l'instant  $t$  est donc :

$$c(i,j,k,t) = \frac{1}{Q[M_{(i,j,k)}]} \cdot \sum_{n=1}^{N_c} Q[M_{(i,j,k)} \cap G_{(n,t)}] \quad (V-5)$$

Avec un volume de maille égal à :

$$Q[M_{(i,j,k)}] = \frac{L_x \cdot L_y \cdot L_z}{I \cdot J \cdot K} \quad (V-6)$$

Le volume  $Q[M_{(i,j,k)} \cap G_{(n,t)}]$  se calcule en connaissant la position du grain  $n$  à l'instant  $t$ . L'expression analytique exacte du volume commun à la maille et au grain est difficile (voire impossible ?) à établir. Comme le montre la Figure 68, un grain  $G$  de rayon  $r_G$  centré en  $(x_G, y_G, z_G)$  est la réunion de volumes élémentaires  $g$  repérés par la position de leurs centres (points noirs).

Les morceaux sont repérés en coordonnées sphériques locales  $(r, \theta, \phi)$  (Figure 69) avec  $N_a$  divisions sur les rayons,  $N_b$  sur l'angle  $\theta$  et  $N_c$  sur l'angle  $\phi$ . Nous définissons alors la position du « centre » de chaque morceau par :

$$\begin{cases} x_B = x_G + r_a \cdot \sin \theta_b \cdot \cos \phi_c \\ y_B = y_G + r_a \cdot \sin \theta_b \cdot \sin \phi_c \\ z_B = z_G + r_a \cdot \cos \theta_b \end{cases} \quad (V-7)$$

$$\text{avec } \begin{cases} r_a = (a + 0,5) \cdot \frac{r_G}{N_a} \\ \theta_b = (b + 0,5) \cdot \frac{\pi}{N_b} \\ \phi_c = (c + 0,5) \cdot \frac{2\pi}{N_c} \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} a \in [0, 1, \dots, N_a - 1] \\ b \in [0, 1, \dots, N_b - 1] \\ c \in [0, 1, \dots, N_c - 1] \end{cases}$$

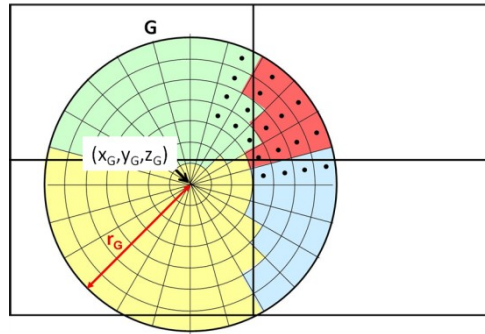


Figure 68. Représentation schématique de la discrétisation des grains

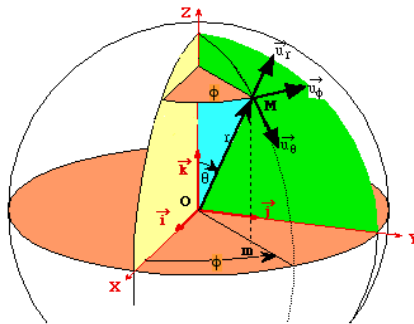


Figure 69. Représentation en coordonnées sphériques des points de l'espace au niveau d'un grain

Par définition, le volume du grain  $n$  est :  $G(n,t) = \bigcup_{a,b,c} g(a,b,c)$ . Nous calculons le volume  $g(a,b,c)$  en utilisant l'expression du volume élémentaire en coordonnées sphériques. Nous exprimons le volume occupé par l'élément  $g(a,b,c)$  par :

$$Q[g(a,b,c)] = \int_{a \frac{r_G}{N_a}}^{(a+1) \frac{r_G}{N_a}} \int_{\frac{b\pi}{N_b}}^{\frac{(b+1)\pi}{N_b}} \int_{\frac{2\pi}{N_c}}^{\frac{2\pi(c+1)}{N_c}} r^2 \sin \theta d\phi d\theta dr \quad (V-8)$$

Où  $r^2 \sin \theta d\phi d\theta dr$  est le volume élémentaire en coordonnées sphériques. On trouve le volume de chaque morceau :

$$Q[g(a,b,c)] = \frac{-2\pi}{3N_c} \left[ \cos \frac{(b+1)\pi}{N_b} - \cos \frac{b\pi}{N_b} \right] \frac{r_G^3}{N_a^3} [(a+1)^3 - a^3] \quad (V-9)$$

Sur la Figure 70, nous constatons que l'algorithme de division des billes par morceaux fonctionne même dans la situation limite où les cases de la grille de calcul sont beaucoup plus petites que les sphères. Il s'agit ici d'une vue en coupe ( $y=25 \text{ mm}$ ). A l'intérieur d'une sphère, la compacité est proche de 1 (l'approximation numérique fait que l'on n'obtient jamais l'égalité parfaite). A l'extérieur de la sphère, la compacité est nulle. On a pris ici un grand nombre de subdivisions sur  $(r, \theta, \phi)$  : 150 divisions sur chaque variable. La grille de calcul considérée forme ici un cube de  $10 \text{ mm}$  de côté et chaque côté est divisé en 40 intervalles soit un total de 6400 voxels.

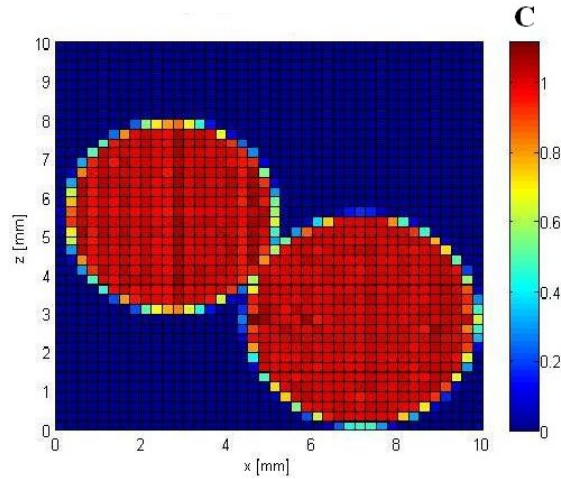


Figure 70. Test de l'algorithme de discrétisation des grains avec 150 divisions sur chaque variable de l'espace  $(r, \theta, \phi)$ . La grille de calcul est formée d'un cube de 10 mm de côté dont chaque côté est divisé en 40 intervalles

Etant donné que les vibrations sont toujours du même type (ici sinusoïdales), on pourrait penser que la compacité soit la même aux instants  $t$ ,  $t+T$ ,  $t+2T$ . Le caractère chaotique des mouvements granulaires contredit légèrement cette assertion. Pour atténuer les fluctuations, la compacité moyenne (dans le temps) est définie comme la moyenne sur un nombre  $H$  de mesures (en général, nous prenons  $H \in [10, 100]$ ). Ainsi, pour un instant  $t \in [0, T]$ , la compacité moyenne dans la maille  $(i, j, k)$  s'écrit :

$$C(i, j, k, t) = \lim_{H \rightarrow \infty} \frac{1}{H} \sum_{h=1}^H c(i, j, k, t + (h-1)T) \quad (\text{V-10})$$

Une unique valeur de compacité est obtenue dans le cas d'un régime stationnaire si  $H$  est choisi assez grand.

## V.B.2 Champ de vitesse

Lorsque des expériences de mise en vibration de grains sont effectuées dans le laboratoire, le déplacement des grains de sable est calculé sur une période  $\tau = N \cdot T$  correspondant à un multiple de la période de vibration de la boîte. Notons qu'il s'agit de déplacements calculés par la méthode PIV qui détermine des déplacements moyens associés à des cases d'une grille de calcul 2D (Figure 66 à gauche).

Dans la méthode des éléments discrets, aucune grille de calcul n'est associée au système vibré et seules sont considérées les positions et vitesses des grains. Afin de

pouvoir comparer les résultats numériques et expérimentaux, les vitesses des grains sont associées aux cases d'une grille de calcul (projection 2D ou 3D) et sont ensuite moyennées.

La Figure 71 indique la trajectoire, pendant une durée  $\tau$ , de trois grains initialement dans la maille grisée. Pour chaque grain, il est possible de définir une vitesse moyenne associée à la durée d'observation  $\tau$  :

$$\vec{v}^\tau(n, t) = \frac{\vec{r}(n, t) - \vec{r}(n, t - \tau)}{\tau} \quad (\text{V-11})$$

Où  $\vec{r}(n, t)$  est la position du grain  $n$  à l'instant  $t$ . Cette définition permet de voir que  $\vec{v}^\tau(n, t)$  tend vers la vitesse instantanée d'un grain  $\vec{v}_g^{inst}(n, t)$  lorsque la durée d'observation  $\tau$  tend vers 0. Nous n'utiliserons pas cette définition car la vitesse instantanée est une variable directement accessible à l'aide de nos simulations numériques. Afin de nous rapprocher des conditions expérimentales et d'éviter un trop grand nombre d'entrées/sorties lors de l'exécution du logiciel, nous choisirons  $\tau$  multiple de la période de vibration  $T$ . Le calcul de la vitesse associé à la maille  $(i, j, k)$  se déroule en deux étapes :

1. Calculer le volume des morceaux de grain présent dans la maille (V-4) :

$$V_m = \sum_{n=1}^{N_c} Q[M_{(i,j,k)} \cap G_{(n,t)}]$$

2. Calculer la vitesse associée à la maille en faisant une moyenne des vitesses des grains pondérée par le volume de grain présent dans la maille :

$$\vec{u}^\tau(i, j, k, t) = \frac{\sum_{n=1}^{N_c} Q[M_{(i,j,k)} \cap G_{(n,t)}] \vec{v}^\tau(n, t)}{\sum_{n=1}^{N_c} Q[M_{(i,j,k)} \cap G_{(n,t)}]} \quad (\text{V-12})$$

On peut aussi calculer un champ moyenné sur plusieurs cycles distants de la période  $\tau$  :

$$\vec{U}^\tau(i, j, k, t, H) = \frac{\sum_{h=1}^H \vec{u}^\tau(i, j, k, t + (h-1)\tau)}{H} \quad (\text{V-13})$$

En régime stationnaire, la vitesse  $\vec{U}^\tau(i,j,k,t)$  devient indépendante de  $t$  lorsque le nombre de mesures  $H$  devient infiniment grand.

Pour le calcul des vitesses instantanées, nous accédons directement à la vitesse  $\vec{v}_g^{inst}(n,t)$  propre aux grains. Pour avoir la vitesse instantanée propre à une case de la grille de calcul, on calcule la moyenne pondérée par le volume de grain présent dans la maille :

$$\vec{u}^{inst}(n,t) = \frac{\sum_{n=1}^{N_c} Q[M_{(i,j,k)} \cap G_{(n,t)}] \cdot \vec{v}_g^{inst}(n,t)}{\sum_{n=1}^{N_c} Q[M_{(i,j,k)} \cap G_{(n,t)}]} \quad (V-14)$$

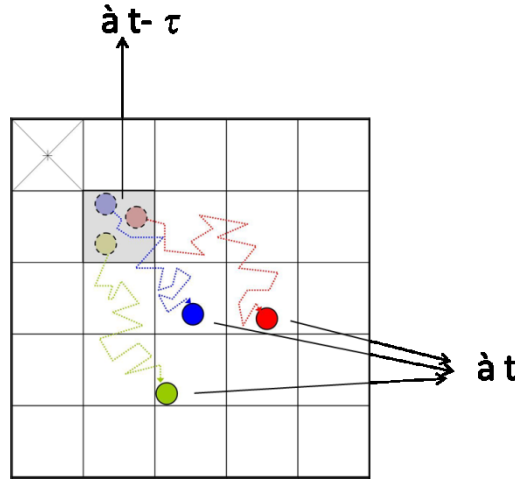


Figure 71. Représentation schématique du déplacement de quelques grains

### V.B.3 Durée à considérer entre deux mesures pour établir des vitesses moyennes

On revient ici sur la définition  $\vec{v}^\tau(n,t) = \frac{\vec{r}(n,t) - \vec{r}(n,t-\tau)}{\tau}$  (V-11) nécessitant de considérer quelle période  $\tau = N \cdot T$  multiple du nombre de cycle de vibration doit être choisie pour effectuer les moyennes temporelles sur les déplacements. La valeur de  $\tau$  considérée est importante car augmenter  $\tau$  permettrait numériquement de baisser le temps de calcul puisqu'on réduirait ainsi le nombre d'entrées/sorties lors de l'exécution du logiciel. Cependant, on voit bien que pour une trop grande valeur de  $\tau$ , les vitesses considérées peuvent devenir aberrantes (par exemple, un grain pourrait revenir à sa

position initiale après un tour complet dans une convection). Les vitesses étant calculées sur des voxels d'une grille de calcul, on considérera que les vitesses calculées sont représentatives si pendant la durée  $\tau$ , les grains ont parcouru une distance inférieure à la longueur caractéristique  $c$  du voxel de la grille de calcul dans laquelle la vitesse est calculée (sinon, on calcule des vitesses qui ne correspondent pas au voxel considéré). Considérons que la vitesse de déplacement caractéristique des grains est proche de la vitesse maximale de déplacement de la boîte  $V_{max}$ . Pendant la durée  $\tau$ , un grain peut se déplacer d'environ :

$$D_{grain} \approx \tau \cdot V_{max} \quad (V-15)$$

On doit donc vérifier la condition :

$$\tau \cdot V_{max} \leq c \text{ soit } \tau \leq \frac{c}{V_{max}} = \frac{2\pi \cdot f \cdot c}{\Gamma \cdot g} \quad (V-16)$$

*Exemple :*

Pour une accélération et une fréquence typiques  $\Gamma = 3$  et  $f = 50 \text{ Hz}$  et une longueur caractéristique de voxel de la grille de calcul  $c = 1 \text{ mm}$ ,  $V_{max} \approx 2 \text{ cm.s}^{-1}$  et  $T = 0,02 \text{ s}$ . D'où :  $n \approx 2$ . Le nombre de périodes à considérer est donc de 2 ou moins. Afin d'être sûr de la validité de nos calculs de vitesse, nous choisirons de calculer les vitesses en considérant les déplacements induits à chaque cycle de vibration, c'est à dire en choisissant  $n=1$  dans (V-11).

## V.B.4 Flux de matière

Les champs de vitesse et de compacité ayant été définis, nous pouvons introduire une nouvelle variable permettant de décrire le flux massique. Le flux de matière sur une période  $\tau$  s'écrit :

$$\vec{p}^\tau(i, j, k, t) = \rho_g \cdot C(i, j, k, t) \cdot \vec{u}^\tau(i, j, k, t) \quad (V-17)$$

Où  $\rho_g$  est la masse volumique des grains. Comme pour la vitesse, on peut considérer le flux de matière moyenné sur un grand nombre  $H$  d'événements distants de la période  $\tau$ . Si  $t \in [0; T]$ , on a :



$$\bar{P}^{\tau}(i, j, k, t, H) = \frac{\sum_{h=1}^H \bar{p}^{\tau}(i, j, k, t + (h-1)\tau)}{H} \quad (\text{V-18})$$

Une unique valeur de quantité de mouvement moyenne est obtenue en régime stationnaire si  $H$  est choisi assez grand. Les flux de quantité de mouvement dans le milieu granulaire sont des données inaccessibles expérimentalement avec les moyens techniques dont nous disposons. Il s'agit donc d'une information nouvelle apportée par la modélisation.

### V.B.5 Champ de contraintes

A chaque grain, il est possible d'associer un tenseur des contraintes moyennes. En homogénéisant, il est possible de calculer la contrainte moyenne dans une case de la grille de calcul. Comme pour la vitesse et la compacité, nous pondérons la contrainte par la fraction volumique de grain présent dans la case de la grille de calcul.

On obtient le tenseur des contraintes instantanées à 9 composantes  $\sigma^M$  (l'indice  $M$  permet de distinguer  $\sigma^M$  lié à la grille de calcul de  $\sigma$  propre aux grains) suivant la formule suivante (comme pour les vitesses, on pondère par la fraction de particule présente dans une case de la grille de calcul) :

$$\sigma^M = \frac{\sum_{n=1}^{N_g} \sigma(n, t) \cdot Q[M(i, j, k) \cap G(n, t)]}{\sum_{n=1}^{N_g} Q[M(i, j, k) \cap G(n, t)]} \quad (\text{V-19})$$

Ensuite, on peut moyenner cette contrainte sur un grand nombre d'évènements séparés d'un temps  $\tau$ . Si  $t \in [0, T]$ , on a :

$$\Sigma(i, j, k, t, H) = \frac{\sum_{h=1}^H \sigma^M(i, j, k, t + (h-1)\tau)}{H} \quad (\text{V-20})$$

En régime stationnaire, on obtient une unique valeur de contrainte moyenne  $\Sigma$  si on choisi un nombre  $H$  d'évènements assez grand. Le champ de pression  $p(i, j, k, t)$  est calculé comme l'équivalent de la pression hydrostatique en mécanique des fluides, en prenant le

tiers de la trace du tenseur des contraintes que multiplie la compacité moyenne du milieu granulaire dans la zone considérée.

$$p(i, j, k, t) = C(i, j, k, t) * \frac{1}{3} \sum_{l=1}^3 \Sigma_{ll}(i, j, k, t) \quad (V-21)$$

## V.C Validation et optimisation de la méthode numérique

Nous donnons tout d'abord la liste des paramètres usuellement utilisés puis nous présentons un exemple de mise en tas numérique (sédimentation), enfin nous exposerons des expériences de calibrage comparants des expériences et simulations présentant des paramètres les plus similaires possibles.

### V.C.1 Liste des paramètres utilisés

Les paramètres que nous utilisons par défaut sont listés Tableau 5. Suite au grand nombre de paramètres à imposer, il est difficile d'évaluer a priori la validité de la simulation. Le sens physique de ces paramètres est détaillé dans II.A Les différents paramètres ont été calculés quand la physique le permettait. Nous avons aussi comparé nos paramètres avec les valeurs utilisées usuellement dans les simulations numériques [54].

Afin de valider ces choix, nous avons réalisé des expériences de calibrage ( où nous comparons les vitesses de grains obtenus expérimentalement et en simulation pour des boites de même dimensions et des grains de même taille sur les faces Nord et Est. Notons que les paramètres présentés dans le Tableau 5 représentent des valeurs par défaut (adoptés lorsqu'ils ne sont pas précisés dans l'expérience considéré). La distribution granulométrique pourra être proche de la distribution granulométrique expérimentale sable 2 (IV.B.3.a ) de diamètre moyen  $\langle d_g \rangle \approx 507 \mu m$  en l'approximant par une gaussienne tronquée pour les petits diamètres ( $d_g < 200 \mu m$ ). Néanmoins, dans la plupart des expériences numériques, l'ensemble des diamètres sera multiplié par 2 afin de réduire de manière importante le nombre de billes et le temps de calcul. Dans le cas de grains de diamètres doubles, la troncature s'effectuera pour  $d_g < 400 \mu m$ . Pour éviter des répétitions

et être plus concis, on ne précisera plus ces considérations granulométriques par la suite, et on se contentera de signaler  $< d_g > \approx 0,5 \text{ mm}$  ou  $< d_g > \approx 1 \text{ mm}$ .

Tableau 5. Listes des principaux paramètres de simulation par défaut

Paramètres	Symbole	Unité	Valeur Expérience	Valeur Simulation
Diamètre moyen des grains	$d_g$	[mm]	$\approx 0,5$ ( IV.B.3.a )	$\approx 1$
Densité des grains	$\rho$	[kg.m <sup>-3</sup> ]	2652	2652
Coefficient de cisaillement	$G$	[GPa]	40	0,4
Coefficient de Poisson	$\nu$	[-]	0,25 [92]	0,3
Coefficient de friction grain/mur	$\mu_{m/g}$	[-]	0,3	0,3
Coefficient de friction grain/grain	$\mu_{g/g}$	[-]	?	1 ( V.C.5.b )
Longueur de la boîte	$L_x$	[mm]	40	40
Largeur de la boîte	$L_y$	[mm]	80	10, périodique
Coefficient de restitution	$e$	[-]	0,7	0,7
Coefficient d'amortissement visqueux	$D_n/D_s$	[N.s.m <sup>-1</sup> ]	0	0,1
Coefficient d'amortissement numérique	$D_{num}$	[-]	0	0,1
Nombre de grains	$N_g$	[-]	$max \approx 10^7$	$max \approx 5.10^4$

## V.C.2 Procédé numérique de préparation du milieu granulaire

La méthode numérique de préparation de l'empilement granulaire par sédimentation diffère sensiblement de la méthode expérimentale. En effet, effectuer la simulation d'un remplissage à l'aide d'un entonnoir dans la boîte nécessiterait un temps de calcul bien trop important. De ce fait, nous utilisons une autre méthode : les grains sont d'abord disposés de manière aléatoire dans l'espace puis, sont soumis à la gravité jusqu'à ce que l'empilement de grains ait atteint un état d'équilibre mécanique. Cet équilibre peut être constaté numériquement grâce à la variable « mean unbalanced force » ou moyenne des forces non équilibrées dans le milieu granulaire.

Appelons  $F_j(i)$ ,  $j=1,...,N_j$  les forces s'exerçant sur le grain  $n$ . On appelle moyenne des forces non équilibrées ou « mean unbalanced force » la variable :

$$muf = \sum_{n=1}^{N_g} \frac{\left\| \sum_{j=1}^{N_j} F_j(n) \right\|}{N_g} \quad (V-22)$$

Si cette valeur est proche de 0 (typiquement  $<10^{-5} N$ ), on peut considérer que le milieu granulaire a atteint un état d'équilibre et n'évoluera plus.

A titre d'exemple, une simulation a été réalisée avec  $L_x=60 \text{ mm}$ ,  $L_y=10 \text{ mm}$ . 12000 billes de diamètre  $\langle d_g \rangle \approx 1 \text{ mm}$  sont générées et le reste des paramètres est identique à ceux exposés au paragraphe précédent. Ceci conduit à une hauteur de sable d'environ  $12 \text{ cm}$ . L'état de l'empilement granulaire après la génération aléatoire de grains et à l'état final sont présentés à la Figure 72. L'évolution de la moyenne des forces contre-balancées (muf) est présentée à la Figure 73. Après un pic caractérisant le rebond des particules contre le fond de la boîte, la moyenne des forces contrebalancées tend rapidement vers 0. On estime qu'après une demi-seconde de sédimentation, le milieu granulaire a atteint un état stable.

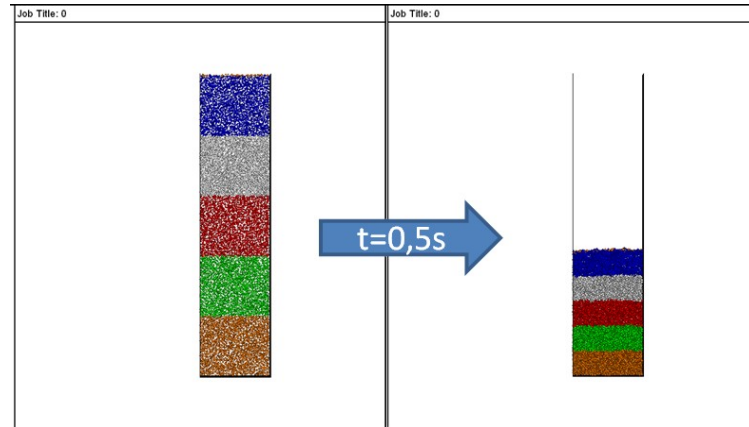


Figure 72. Préparation d'un milieu granulaire : génération aléatoire de grains puis dépôt par gravité. Ici,  $L_x=60$  mm, nombre de grains  $N_g=12000$  conduisant à une hauteur de sable d'environ 120 mm

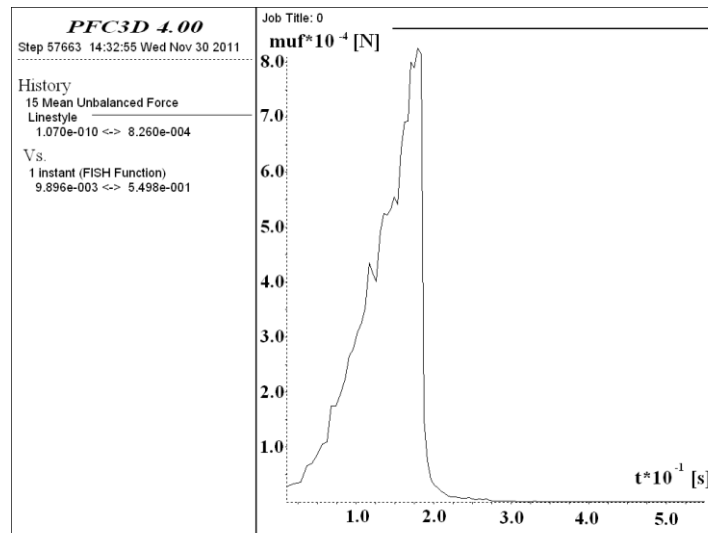


Figure 73. Evolution de la moyenne des forces non contre-balançées ( $\times 10^{-4}$  Newtons) en fonction du temps ( $\times 10^{-1}$  s). Au bout d'une demi-seconde, on estime que le milieu granulaire a atteint un état stable

### V.C.3 Conditions aux limites périodiques

#### V.C.3.a Définition de la cellule périodique

Dans le but de présenter un milieu granulaire simulé réaliste avec le minimum de particules (afin d'obtenir des temps de calcul raisonnables), nous avons utilisé des

frontières périodiques le long de l'axe horizontal  $y$  perpendiculaire à l'axe  $x$  de vibration. Outre la réduction du temps de calcul, cette technique permet de simuler des longueurs  $L_y$  très grandes. En fait, cette technique simule artificiellement un espace entre les faces Est et Ouest copié à l'infini. Le principe est le suivant : quand une bille sort de la face Est, elle entre dans la face Ouest et quand elle sort par la face Ouest, elle entre dans la face Est (Figure 74).

### V.C.3.b Largeur limite de la cellule périodique

Un des paramètres à estimer lors de la réalisation d'une simulation est la taille de la cellule périodique  $L_y$ . Nous visualisons sur la Figure 74 que le principe d'une cellule périodique permet de simuler une boîte infiniment longue sur dans sa direction périodique. Notons tout de même que pour que cette assertion soit valable, la taille du côté  $L_y$  doit être supérieure à une valeur critique en dessous de laquelle il y aurait des effets de bord.

En effet, même sans paroi le long de l'axe  $y$ , on peut concevoir que si la largeur de la cellule périodique est petite (proche de la taille d'un grain par exemple), le comportement du milieu granulaire vibré sera biaisé. Un grain pourrait par exemple avoir une forte interaction avec lui-même (par exemple un premier grain en contact avec un grain voisin qui est lui-même en contact avec le premier grain), ce qui est physiquement aberrant si le but est de simuler une boîte infiniment large. Par contre, nous supposons qu'à partir d'une largeur critique  $L_y^{crit}$ , ce type de phénomène devient inopérant et le comportement du milieu granulaire devient globalement le même quelle que soit la largeur  $L_y > L_y^{crit}$  et correspond alors à celui d'une boîte infiniment large dans la direction de périodicité. Cette assertion a été confirmée en étudiant l'influence de  $L_y$  sur la vitesse en face Nord et en particulier, sur la vitesse de chute maximale. Le choix de ce paramètre tient au fait qu'il soit l'un des plus sensibles à une variation de  $L_y$ .

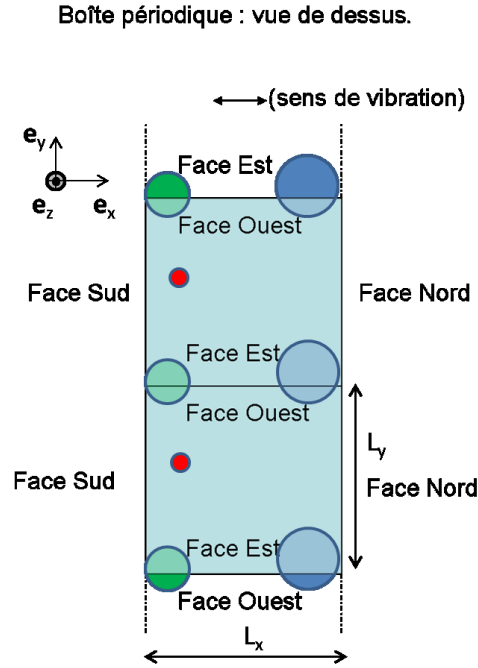


Figure 74. Représentation schématique d'une boîte périodique dans la méthode des éléments discrets

Notons que la largeur critique de la boîte périodique dépend grandement de l'expérience considérée et du paramètre étudié. Par exemple, Anand *et al.* [92] estime qu'une cellule périodique de 2 tailles de grain est suffisante pour permettre de décrire le déchargement de grains d'un silo. Müller *et al.* [93] utilise par contre une cellule périodique de 10 tailles de grains pour des grains vibrés verticalement.

Les profils de vitesses en fonction de  $L_y$  sont présentés Figure 75. L'incidence de  $L_y$  sur la vitesse maximale est présenté Figure 76. On remarque qu'à partir d'une dizaine de tailles de grains, soit  $L_y = 10 \text{ mm}$ , les profils se superposent, c'est-à-dire que le comportement de chute des grains le long des faces Nord et Sud est globalement le même. On constate aussi cette similitude de comportement en observant la variation de la vitesse maximale en face Nord en fonction de  $V_{\max} = f(L_y)$  (Figure 76). La fonction  $f$  atteint un plateau de  $16 \text{ mm.s}^{-1}$  à partir de  $L_y = 10 \text{ mm}$  soit 10 tailles de grain. On considérera donc que 10 tailles de grain est une dimension suffisante à attribuer à la cellule périodique afin de simuler une boîte de largeur infinie selon ce côté.

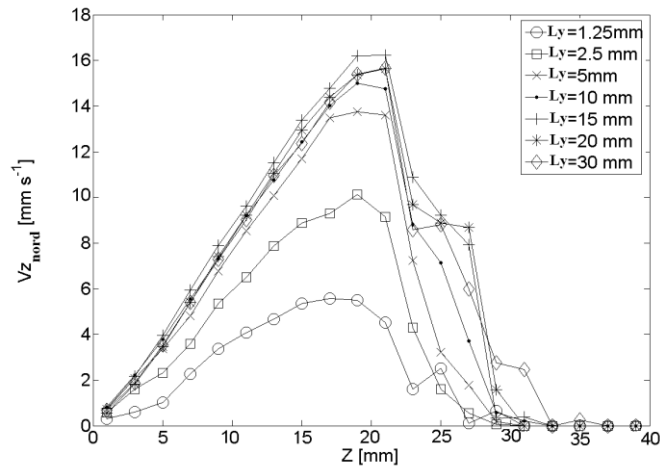


Figure 75. Influence de la taille de la cellule périodique sur le profil de vitesse sur la face Nord.  $f=50$  Hz,  $\Gamma=3$ ,  $L_x=40$  mm,  $H_{ini}=30$  mm,  $\langle d_g \rangle=1$  mm

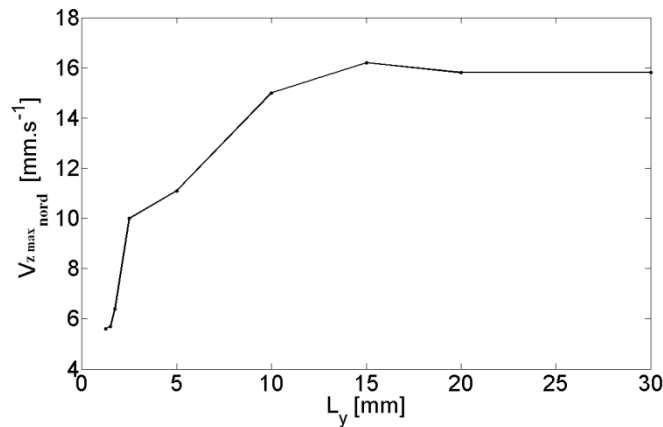


Figure 76. Influence de la largeur de la cellule périodique sur la vitesse maximale en face Nord,  $f=50$  Hz,  $\Gamma=3$ ,  $L_x=40$  mm,  $H_{ini}=30$  mm

## V.C.4 Calibrage sur expériences de référence

### V.C.4.a Utilisation de sable

Nous utilisons ici en modélisation et en simulation des boîtes de taille  $L_x=20$  mm,  $L_y=20$  mm (non périodique en simulation) avec une hauteur initiale de grain  $H_{ini}=20$  mm. Nous comparons les résultats de sphères simulant les grains de sable expérimentaux de 0,5 mm de diamètre en moyenne (sable 2) et de 1 mm de diamètre environ (choix de grains par tamis entre 900 et 1000  $\mu\text{m}$ ). La distribution numérique a été coupée à 200  $\mu\text{m}$  pour le sable 2 afin de réduire le temps de calcul. Pour le sable de 1 mm, on a choisi



d'adopter une distribution uniforme pour des diamètres  $d_g$  compris entre 900 et 1000  $\mu m$ . Nous adoptons la fréquence  $f=50$  Hz et l'accélération  $\Gamma=3$  qui nous servira de référence dans toute cette étude.

Pour un même diamètre, le comportement global des grains en expérience et simulation est très proche comme le montre la Figure 75 représentant les champs de vitesse constatés pour des grains de diamètre moyen  $d_g \approx 0,5$  mm (sable 2).

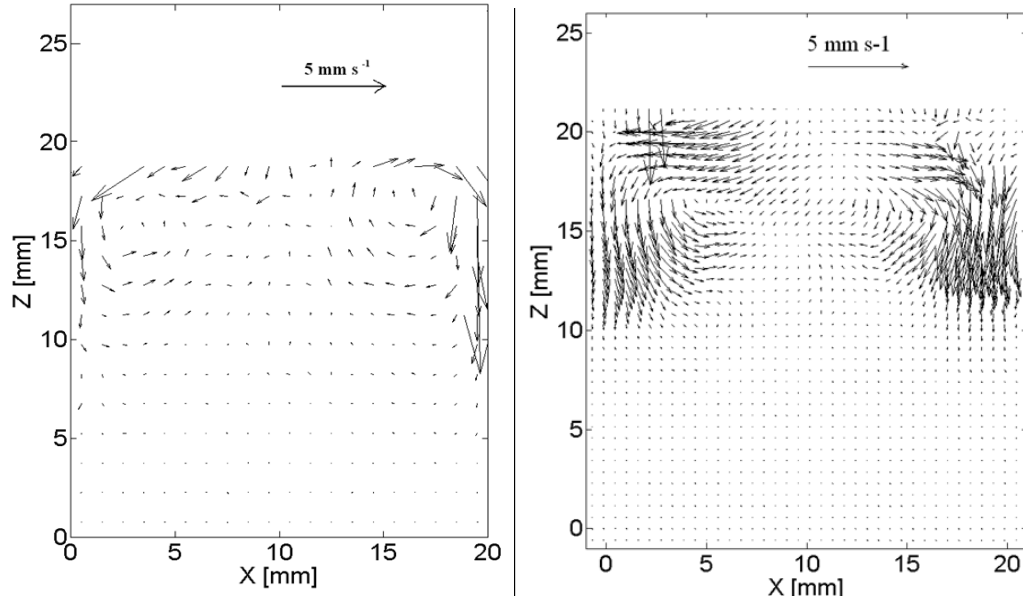


Figure 77. Champ de vitesse constaté face Est pour des grains de diamètre moyen  $\langle d_g \rangle = 0,5$  mm, à gauche : résultats de simulation, à droite, résultats expérimentaux.

$L_x = 20$  mm,  $L_y = 20$  mm (non périodique), hauteur initiale de sable  $H_{ni} = 20$  mm.

$d_g \approx 0,5$  mm.  $f = 50$  Hz,  $\Gamma = 3$

Les profils de vitesse en face Nord obtenus sont présentés Figure 78. On constate que les vitesses de convections maximales obtenues en simulations et expériences coïncident. On notera tout de même une différence sur le profil de vitesse au niveau de la répartition des vitesses suivant l'altitude. En simulation, les vitesses restent plus grandes vers le fond de l'empilement. Nous supposons que cette différence de comportement tient aux différences de forme de particules entre modélisation et expérience. En effet, ces différences ne sont plus observées si l'on utilise des billes sphériques en simulation et expérience (section V.C.4.b).

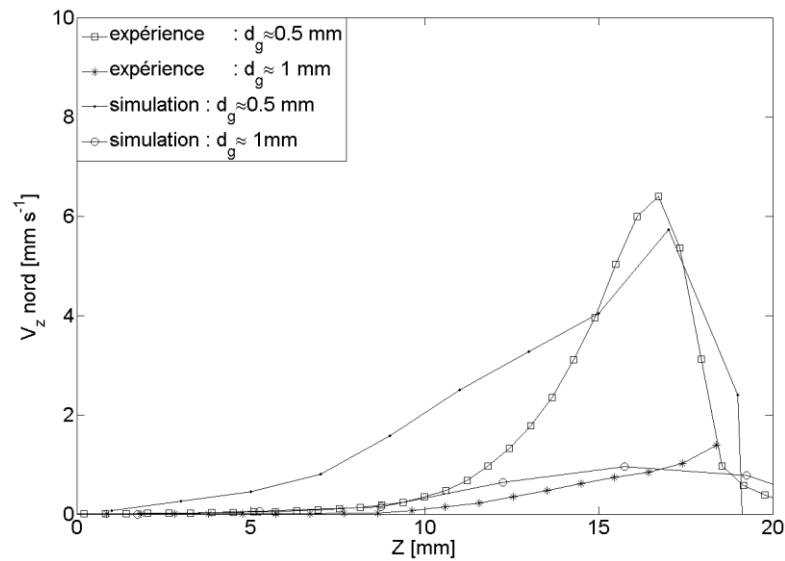


Figure 78. Comparaison des vitesses en face Nord pour des boîtes de même dimensions  $L_x=20\text{ mm}$ ,  $L_y=20\text{ mm}$  et une même hauteur de sable  $H_{ini}=20\text{ mm}$ . En expérience et simulation pour des grains de diamètre moyens 0,5 et 1 mm

#### V.C.4.b Utilisation de billes de silice

Afin de nous éclairer sur l'influence de la forme sur le profil de vitesse, nous avons réalisé une expérience et une simulation avec des boîtes de taille identique  $L_x=40\text{ mm}$ ,  $L_y=40\text{ mm}$  (non périodique) pour une hauteur de sable identique ( $H_{ini}=40\text{ mm}$ ) avec des billes en silice poreuse de diamètre 2 mm. Nous observons que dans cette situation, les vitesses de grains sur les couches de surface profondes de l'empilement restent proches (Figure 79). Ainsi, on peut penser que la forme des grains influence grandement l'épaisseur de la couche de grain fluidisé et expliquer les écarts constatés dans la section précédente entre sable et billes sphériques par la différence sur ce paramètre.

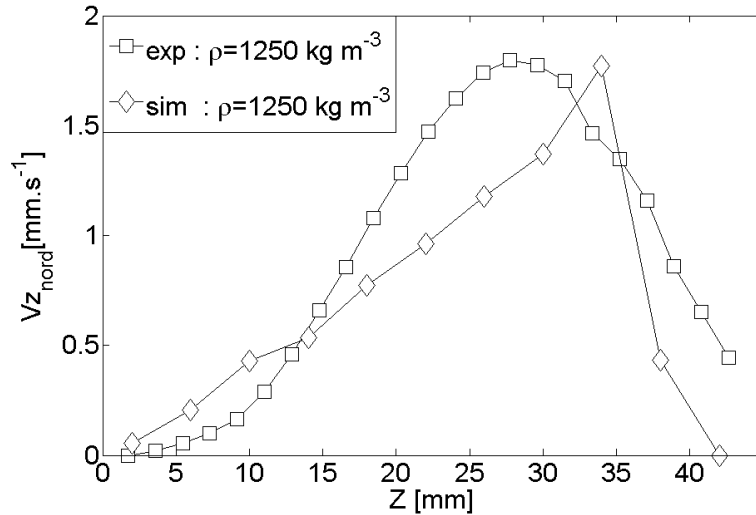


Figure 79. Comparaison des profils de vitesse expérimental et simulé en face Nord pour des billes en silice poreuse (dans l'expérience) de diamètre  $\langle d_g \rangle = 2 \text{ mm}$  et de densité  $\rho = 1,25$ .  $L_x = 40 \text{ mm}$ ,  $L_y = 40 \text{ mm}$  (non périodique) et une hauteur initiale de sable  $H_{ini} = 40 \text{ mm}$

## V.C.5 Talus dynamique

### V.C.5.a Etude expérimentale : mesure de l'angle de talus par la méthode de la paroi amovible (MPA)

Nous mesurons la formation d'un angle de talus obtenu en remplissant une boîte de sable de distribution granulométrique double de celle présentée section IV.B.3.a (sable 2). Le dispositif est constitué d'une boîte en plastique d'une largeur  $L_x = 120 \text{ mm}$ , d'une épaisseur  $L_y = 175 \text{ mm}$  et d'une hauteur  $L_z = 85 \text{ mm}$ . La boîte est d'abord remplie entièrement, puis la paroi droite est retirée rapidement afin que le sable s'écoule pour former un talus d'angle  $\theta_t'$  (Figure 80). La différence avec la mesure de l'angle  $\theta_t$  présentée section IV.B.3.d provient du caractère dynamique de la formation du tas. Alors que le talus se forme de manière lente (quasi statique) dans le dispositif précédent (3-4 min), on assiste dans la méthode MPA à la constitution très rapide du talus final (en 4-5 secondes). On constate une différence importante sur l'angle de talus :  $\theta_t' = 30^\circ \pm 1^\circ$  (Figure 81) au lieu de  $\theta_t = 37,5^\circ \pm 1^\circ$ . On peut expliquer cette différence par le fait que

dans la méthode MPA, la couche de grain supérieure chute de manière brutale et entraîne dans son élan la couche inférieure. D'où une hauteur finale de sable moins grande et un angle de talus plus petit.

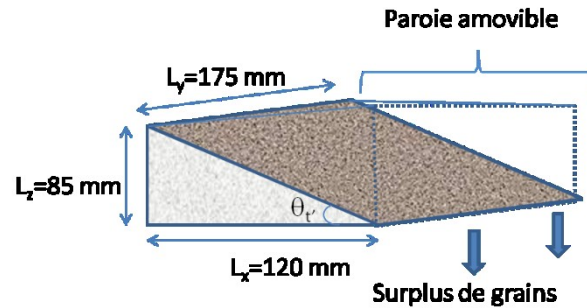


Figure 80. Principe du dispositif 3D utilisé pour mesurer l'angle de talus (dynamique)

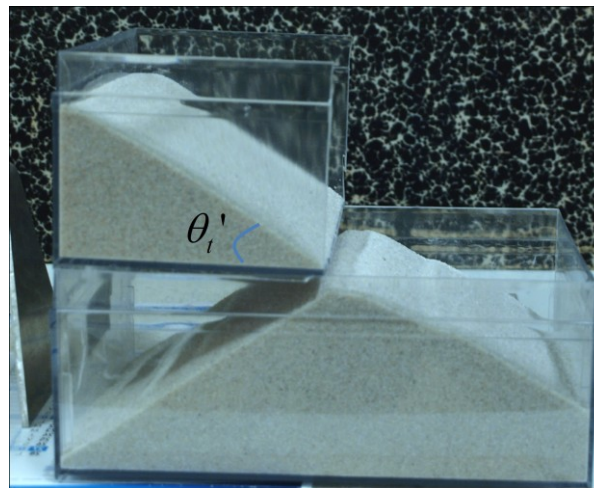


Figure 81. Photographie du dispositif MPA permettant la mesure d'un angle de talus « dynamique ». La partie supérieure gauche de la boîte est retirée brutalement afin de laisser le talus supérieur droit se former. Angle de talus dynamique obtenu :

$$\theta'_i = 30^\circ \pm 1^\circ$$

#### V.C.5.b Etude numérique : mesure de l'angle de talus par la méthode de la paroi amovible (MPA)

L'expérience précédente de création d'un angle de talus « dynamique » a été reproduite numériquement. On utilise pour cela une boîte périodique sur  $L_y$  de dimensions  $L_x = 40 \text{ mm}$ ,  $L_y = 10 \text{ mm}$  avec une hauteur initiale de sable  $H_{ini} = 30 \text{ mm}$  pour un diamètre moyen de grain  $\langle d_g \rangle \approx 1 \text{ mm}$ . On étudie ici l'influence du coefficient de friction entre

grains  $\mu_{g/g}$ . Une couche de grains d'épaisseur 40 mm est déposée par sédimentation. Le mur gauche est alors retiré afin de laisser les billes s'écouler librement. Pour maintenir (artificiellement) la couche de bille du fond sur le socle, on fixe une forte valeur du coefficient de friction entre le sol et les grains  $\mu_{s/g} = \mu_{m/g} = 4$ . Après écoulement des grains, on obtient des talus dont la pente diffère selon le choix de  $\mu_{g/g}$  (Figure 82). Les résultats obtenus sont illustrés Figure 83. On visualise que l'angle de talus numérique  $\theta'_m$  atteint un maximum voisin de  $27^\circ$  à partir d'un coefficient de friction microscopique  $\mu_{g/g} = 1$ . Sachant que l'angle de talus « dynamique » effectif dans l'expérience considérée est de  $30^\circ \pm 1^\circ$ , nous estimons que l'approximation numérique du coefficient de friction est correcte pour  $\mu_{g/g} = 1$ . Nous ne considérerons pas d'angle de talus plus grand à cause du peu de sens physique d'un coefficient de friction équivalent supérieure à 1 (correspondant à un angle de talus de  $35^\circ$ ). Notons que pour la plupart des modélisations que nous avons effectuées, nous avons choisi un coefficient de friction macroscopique égal à 0,7. Cette valeur est proche de la tangente de l'angle de talus statique  $\mu_s$  mesuré à l'aide du talumètre et du rhéomètre à poudre FT4 (section IV.B.3.b et IV.B.3.d ). La différence effective entre le coefficient de friction microscopique  $\mu_{g/g}$  entre grains implémenté dans la méthode DEM et le coefficient de friction  $\mu_s$  correspondant à un milieu continu équivalent du milieu granulaire nous est en effet apparue tardivement dans ce travail. Le choix d'un angle de talus légèrement plus grand aurait été plus approprié (Figure 83), mais reste tout de même très correct pour la plupart des déductions venant des modélisations effectuées.

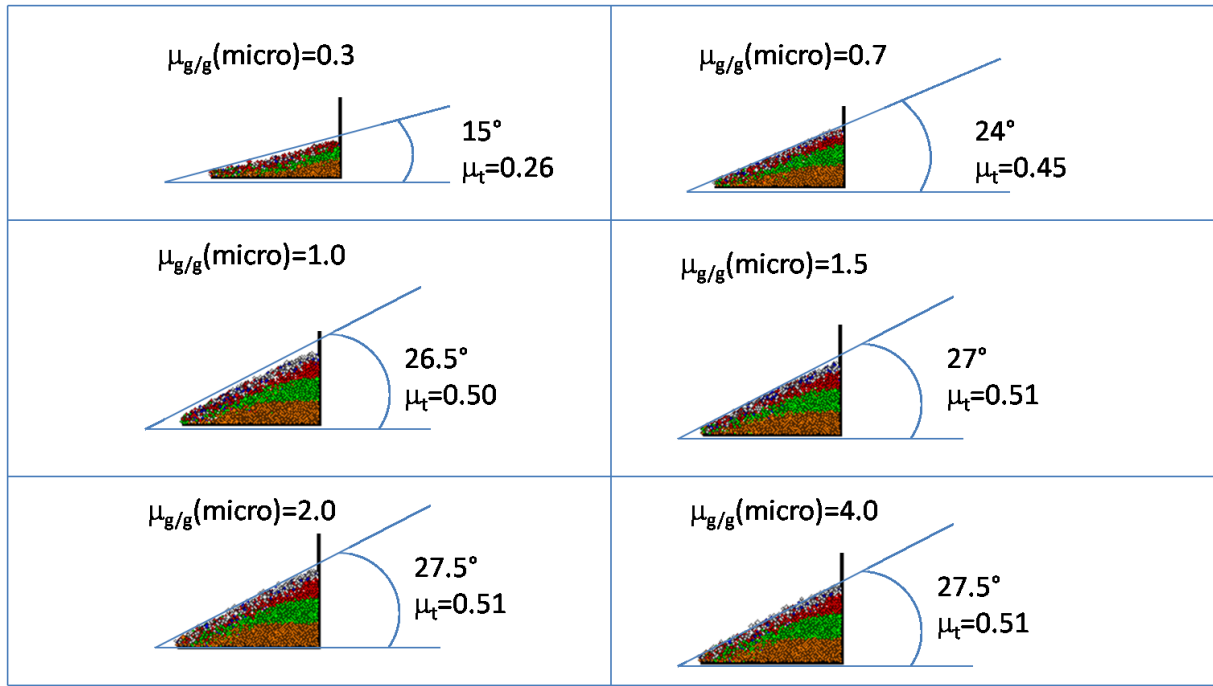


Figure 82. Angle de talus obtenus en simulation après suppression du mur gauche pour  $L_x=40 \text{ mm}$ ,  $L_y=10 \text{ mm}$  (périodique) avec une hauteur initiale de sable  $H_{ini}=40 \text{ mm}$  et un diamètre moyen de grain  $\langle d_g \rangle \approx 1 \text{ mm}$ .  $\mu_t = \tan \theta'_m$

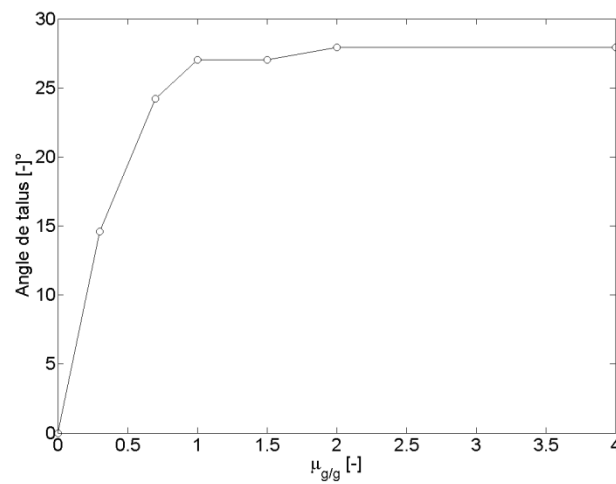


Figure 83. Evolution de l'angle de talus numérique en fonction du coefficient de friction  $\mu_{g/g}$ . (méthode MPA) Rappel : angle de talus « dynamique » obtenu expérimentalement de  $30^\circ$

## Conclusion du chapitre V

Nous avons présenté dans cette section les algorithmes que nous avons élaborés, afin de passer d'un point de vue lagrangien, donné par le logiciel du commerce PFC3D, à une représentation eulérienne. Cette dernière représentation nous permet d'accéder à diverses variables très utiles, comme les champs vectoriels ou scalaires définissant :

- La compacité du milieu granulaire,
- La vitesse des grains,
- Le flux de matière,
- Le champ de contraintes.

Une série de paramètres de référence a été proposée afin d'établir des simulations réalistes. Les valeurs de ceux-ci ont été mesurées expérimentalement, ou inspirées des valeurs usuellement utilisées dans la bibliographie. Des tests permettent de valider la pertinence de l'utilisation de la série de paramètres proposée. En particulier, nous obtenons de très bonnes corrélations entre expérience et modélisation sur la vitesse des grains.

Des tests de validation du jeu de paramètres montrent que la vitesse des grains est multipliée par 7 lorsque le diamètre des grains passe de 1 *mm* à 0,5 *mm*. Nous avons donc choisi de faire un compromis important pour la suite de l'étude : en simulation, nous utiliserons des grains de diamètre double de ceux de l'expérience pour obtenir des temps de calcul raisonnables avec des tailles de boîte équivalentes.

Par ailleurs, des expériences d'étalonnage indiquent que la géométrie des grains a une influence sur la forme du profil de vitesse constaté. Une simulation parfaitement réaliste nécessiterait donc d'adapter la forme des grains à celle de l'expérience. Mais un modèle de forme de grain non sphérique poserait des problèmes numériques plus aigus.

Enfin, le coefficient de friction des grains  $\mu_{g/g}$  peut différer de la tangente de l'angle de talus. Une expérience de caractérisation a permis de montrer que l'on trouve les meilleures corrélations entre simulation et expérience pour  $\mu_{g/g}=1$ . L'angle de talus atteint un palier à partir de cette valeur.

## Conclusion de la deuxième partie

Deux dispositifs complémentaires ont été établis afin de caractériser l'influence de vibrations horizontales sur un milieu granulaire vibré. L'un expérimental combine un pot vibrant, un système de profilométrie optique et un système d'acquisition d'images couplé à une méthode PIV permettant d'accéder à la densité globale du milieu granulaire et à la vitesse des grains. L'autre numérique, est basé sur la méthode des éléments discrets ainsi que sur un post-traitement des données permettant d'accéder aux densités locales (et donc aussi globales), et aux vitesses de grains. Les vitesses et densités peuvent ainsi être comparées dans les deux situations.

La simulation permet d'accéder à des variables comme le champ de contrainte, les densités locales, ou les flux granulaires, inaccessibles ou difficilement accessibles à l'expérience. Le bon accord qualitatif et quantitatif entre expérience et simulation permet de juger pertinente l'utilisation de la DEM pour obtenir des informations supplémentaires sur l'état du milieu granulaire vibré.







## Troisième partie :

# Travaux expérimentaux et numériques

Nous présentons ici nos résultats numériques et expérimentaux pour deux configurations différentes. Les différents types de boîtes utilisées dans nos études sont schématisées Figure 84.

Nous allons commencer par étudier les écoulements en **milieu ouvert** et en tout premier lieu, le cas simple de grains contenus dans des boîtes parallélépipédiques vibrés (boîtes B1). Ensuite, nous considérerons le cas de boîtes percées latéralement et vibrées (boîtes B2). Celles-ci nous permettent d'obtenir des informations sur les écoulements de grains à travers les orifices créés. Nous montrerons des corrélations de comportement dans ces deux systèmes étudiés (boîtes simples et percées).

Nous passerons après cela à l'analyse du comportement d'un milieu granulaire vibré confiné grâce à la présence d'un **toit au dessus des boîtes (couvercle)** par lequel le sable est introduit à l'aide d'un petit entonnoir situé sur le côté du toit (boîtes B3). Nous verrons que dans cette situation, il est intéressant d'utiliser un dispositif couplant un accéléromètre et un capteur de force. Celui-ci permet d'évaluer l'énergie dissipée et d'en obtenir des informations sur l'état de l'empilement vibré.

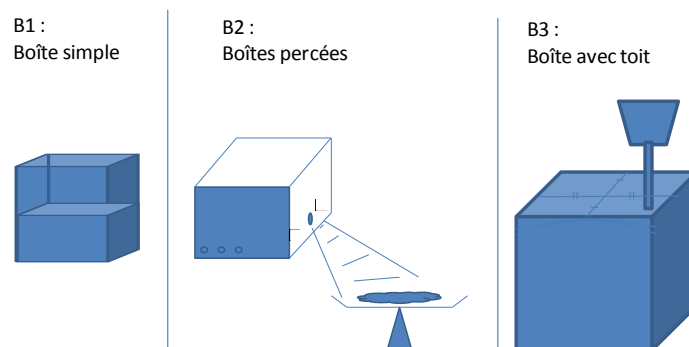


Figure 84. Schémas des différentes boîtes utilisées

## Chapitre VI Etudes en milieu ouvert

### VI.A Etude phénoménologique d'un milieu granulaire vibré (simulation)

#### VI.A.1 Déplacement de matière

Avant de nous lancer dans une étude paramétrique systématique combinant expérience et simulation, nous allons présenter de manière synthétique les principaux aspects de la phénoménologie avec l'aide de notre outil de simulation. Le milieu granulaire est déposé dans une boîte parallélépipédique et soumis à des vibrations horizontales sinusoïdales d'accélération adimensionnée  $\Gamma=3$  et de fréquence  $f=50\text{ Hz}$ , une largeur  $L_x$  de boîte est de  $60\text{ mm}$  et les grains ont un diamètre  $d_g$  compris entre  $900\text{ }\mu\text{m}$  et  $1000\text{ }\mu\text{m}$  présentant une distribution uniforme en nombre. Les autres paramètres sont identiques aux paramètres de référence considérés au § V.C.1 .

Nous présentons tout d'abord le phénomène de convection en nous appuyant sur des études numériques des flux de matière dans le milieu granulaire vibré. Ensuite, à partir de la notion de flux, nous calculons la vitesse de déplacement du centre de gravité du milieu granulaire orienté selon  $z$ . Le signe de cette vitesse indique si le milieu granulaire est en phase de compaction, en régime stationnaire ou en expansion et le module de cette vitesse caractérise l'intensité l'évolution.

##### VI.A.1.a Création d'un espace latéral Nord/Sud de faible densité

Comme présenté et détaillé dans la partie bibliographie (section III.A.1 ), deux rouleaux de convection contrarotatifs apparaissent pour des accélérations adimensionnées  $\Gamma$  supérieures à 1. L'espace de faible densité créé de manière intermittente le long des parois Nord et Sud est l'une des principales origines de ces flux granulaires. Nous avons vérifié que dans nos simulations numériques, cet espace de faible densité est bien présent en évaluant la compacité quand la boîte se déplace de gauche à droite et se trouve à mi-parcours entre les deux positions de butée (Figure 85 et Figure 86). Par inertie, après que la boîte ait été accélérée de gauche à droite, les grains ont été poussés vers la paroi de gauche et une zone de faible densité se crée à droite de l'empilement granulaire. Cet

espace d'une largeur de 1 à 2 mm environ (Figure 86) permet aux grains de descendre par gravité le long des parois Nord et Sud et au mouvement de convection de s'initier. Remarquons que la densité de l'espace proche des parois Nord et Sud est d'autant plus faible que l'on se trouve prêt de la surface de l'empilement. Lorsqu'on effectue une moyenne de compacité prise à 2 mm du bord, la compacité varie de 10% en surface à 50% au fond de l'empilement alors que la compacité moyenne dans la boîte est proche de 60%.

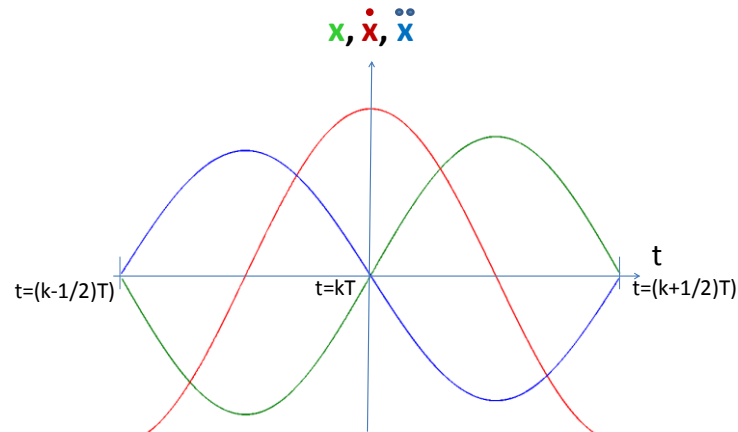


Figure 85. Représentation schématique des accélérations (en bleu), vitesses (en rouge) et positions (en vert) de la boîte vibrée. A  $t = kT$  (où  $T$  est la période de vibration), la boîte est à mi-parcours entre les deux positions de butée et vient de subir une accélération de gauche à droite le demi-cycle de vibration qui précède

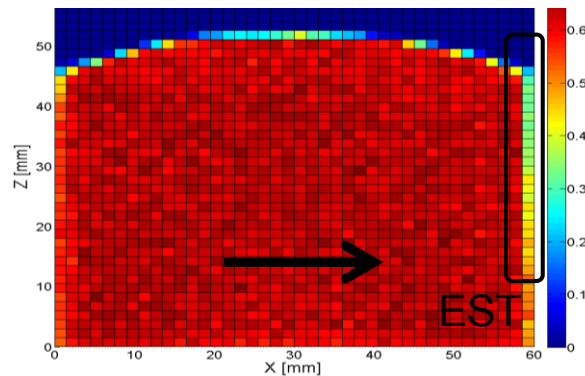


Figure 86. Milieu granulaire accéléré de gauche à droite, un espace de faible densité est créé de manière intermittente le long des parois Nord/Sud. Mesure de compacité effectuée en régime stationnaire quand la boîte est à mi-parcours entre les deux positions extrêmes

### VI.A.1.b Flux et régime stationnaire

On visualise sur la Figure 87 la vitesse de déplacement selon  $z$  du centre de gravité du milieu granulaire  $V_{z_g}$  en fonction du temps. Celle-ci est calculée de la manière suivante :

$$V_{z_g} = \sum_{i=1}^{N_c} jz_i = \sum_{i=1}^{N_c} C_i V_{z_i} \quad (\text{VI-1})$$

Où  $N_c$  est le nombre de cases de la grille de calcul correspondant au problème modélisé,  $i$  l'indice de la case,  $C_i$  la compacité du milieu granulaire dans la case  $i$  et  $V_{z_i}$  la vitesse de déplacement selon  $z$  des grains situés dans la case  $i$ ,  $jz_i$  le flux de matière par unité de surface de la case  $i$ . On visualise sur la Figure 87 que cette vitesse est très importante aux premiers instants, chute brutalement, et devient proche de 0 dès la première seconde de vibration. Ensuite, il faut attendre la sixième seconde avant de voir osciller la vitesse de déplacement du centre de gravité entre des valeurs positives et négatives proche de 0. Nous distinguerons donc 3 périodes. Avant la première seconde de vibration, le milieu granulaire est dans sa phase principale de compaction. Au bout d'une seconde et jusqu'à la sixième seconde de vibration nous estimons que le régime de vibration devient pseudo-stationnaire. A partir de la sixième seconde de vibration, le régime de vibration devient stationnaire. En régime stationnaire, la densité du milieu granulaire n'évolue plus. Il a été totalement compacté, et le comportement des grains devient identique sur une moyenne temporelle suffisamment large. Ce temps de 6 secondes (300 cycles à 50  $Hz$ ) permettant l'établissement d'un régime dit « stationnaire » correspond approximativement au temps de compaction établie expérimentalement d'environ 10 secondes par Raihane (500 cycles à 50  $Hz$ , section III.A.2 ).

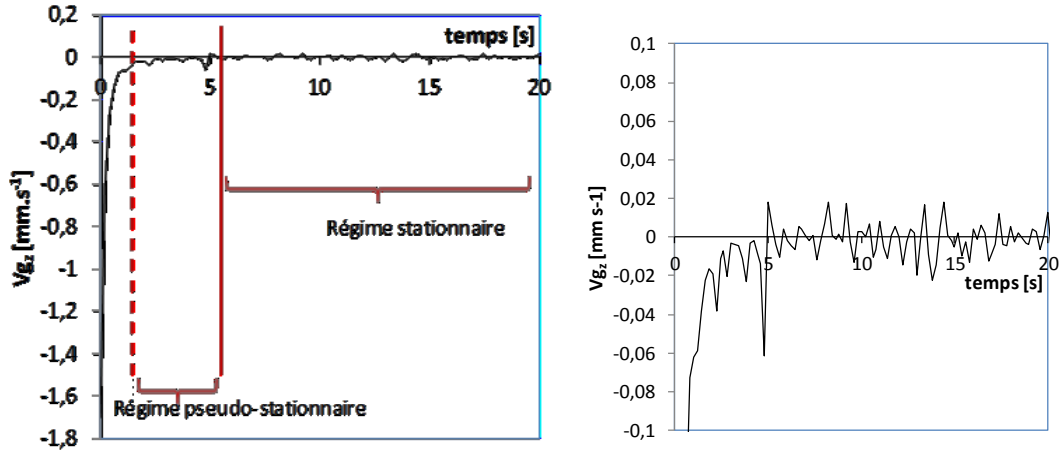


Figure 87. Evolution de la vitesse du centre de gravité de l'ensemble du milieu granulaire au cours des 20 premières secondes. Au bout d'une seconde, la vitesse de compaction devient 20 fois plus faible que la vitesse de compaction initiale. Au bout de 6 secondes, il n'y a plus aucune compaction et la vitesse du centre de gravité fluctue autour de 0. A droite, même graphique avec un tracé sur une échelle plus fine

#### VI.A.1.c Flux et débits de matière

Nous divisons le milieu granulaire en huit zones numérotées de I à VIII et visualisons le flux de matière solide par unité de surface en  $\text{mm.s}^{-1}$  (Figure 88). Trois points permettent de délimiter ces zones : le centre de chacun des rouleaux de convection  $C1$  et  $C2$  et le point 0 situé à mi-distance entre  $C1$  et  $C2$ . Les centres des rouleaux de convection se trouvent à environ 10 mm de la surface et des bords latéraux pour une hauteur de grains  $H_{\text{sable}} \approx 50 \text{ mm}$ .

Le débit provenant d'une zone  $\alpha$  vers une zone  $\beta$  s'écrit :

$$d_{\alpha\beta} = \iint_{S_{\alpha\beta}} \vec{j} \cdot \vec{n}_{\alpha\beta} dS = \iint_{S_{\alpha\beta}} \vec{j} \cdot \vec{dS} \quad (\text{VI-2})$$

Où  $\vec{j} = C\vec{V}$  est le flux par unité de surface (produit de la compacité moyenne par la vitesse moyenne en chaque point) et  $\vec{n}_{\alpha\beta}$  le vecteur normal à la surface d'échange.

Sur la Figure 88 sont représentés les flux moyennés sur 400 cycles du 300<sup>ème</sup> au 700<sup>ème</sup> cycle (régime stationnaire, section précédente). Rappelons que les paramètres

choisis sont  $\Gamma=3$ ,  $f=50$  Hz,  $L_y=10$  mm,  $L_x=60$  mm,  $H_{sable}\approx 50$  mm. Ces flux sont moyennés sur une durée de 400 cycles. Ils sont logiquement symétriques par rapport au centre de la face Est.

Sur la Figure 89 sont listées les valeurs de flux entre les différentes zones en  $\text{mm}^3.\text{s}^{-1}$ . Les débits additionnés donnent  $2 \text{ mm}^3.\text{s}^{-1}$  (apparente création de matière), cette erreur négligeable est principalement due aux arrondis numériques. A  $1 \text{ mm}^3.\text{s}^{-1}$  près et dans chaque zone, le flux de matière est nul, un volume identique de grain entre et sort de ces zones. Sur un temps long, la densité du milieu granulaire n'évolue donc pas. De plus, les débits entre les zones contiguës aux centres des vortex sont du même ordre de grandeur, entre 115 et  $120 \text{ mm}^3.\text{s}^{-1}$ . On trouve donc une symétrie des débits par rapport aux centres des vortex. Les échanges de matière entre les deux parties symétriques de la boîte, gauche et droite sont quasi nuls, de l'ordre de  $2 \text{ mm}^3$  par seconde. Les flux « se concentrent » sur la partie supérieure de l'empilement granulaire (sur une épaisseur d'environ 10 mm à partir de la couche de surface). Ces flux sont plus « faibles » sur la partie inférieure de l'empilement granulaire mais les débits restent équivalents si l'on considère une couche de grains inférieure de 40 mm et une couche de surface de 10 mm d'épaisseur.

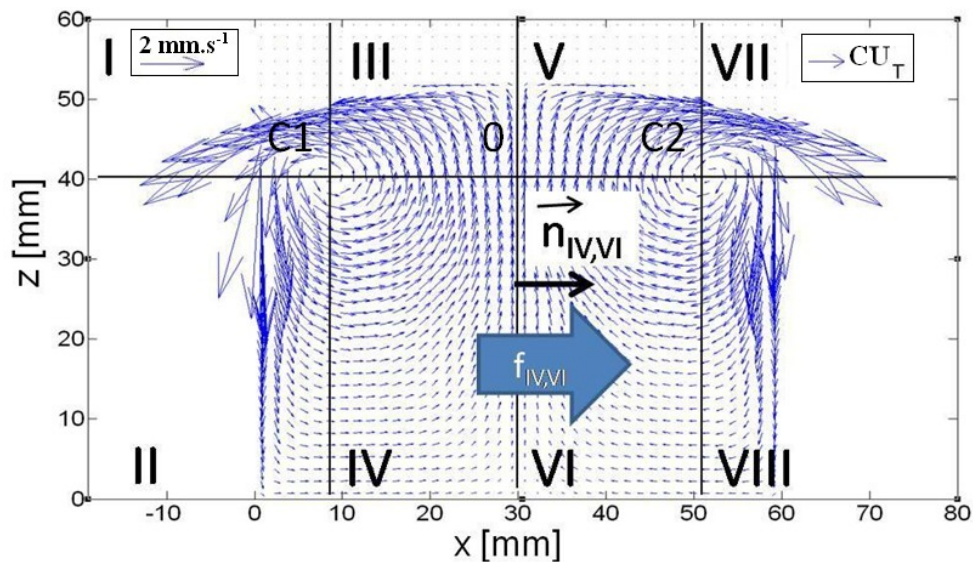


Figure 88. Division du milieu granulaire en zones. Pour exemple,  $d_{IV,VI}$  caractérise le flux de grain de la zone IV vers la zone VI.  $\Gamma=3$ ,  $f=50$  Hz,  $L_y=10$  mm,  $L_x=60$  mm,  $H_{sable}\approx 50$  mm. Projection en face Est



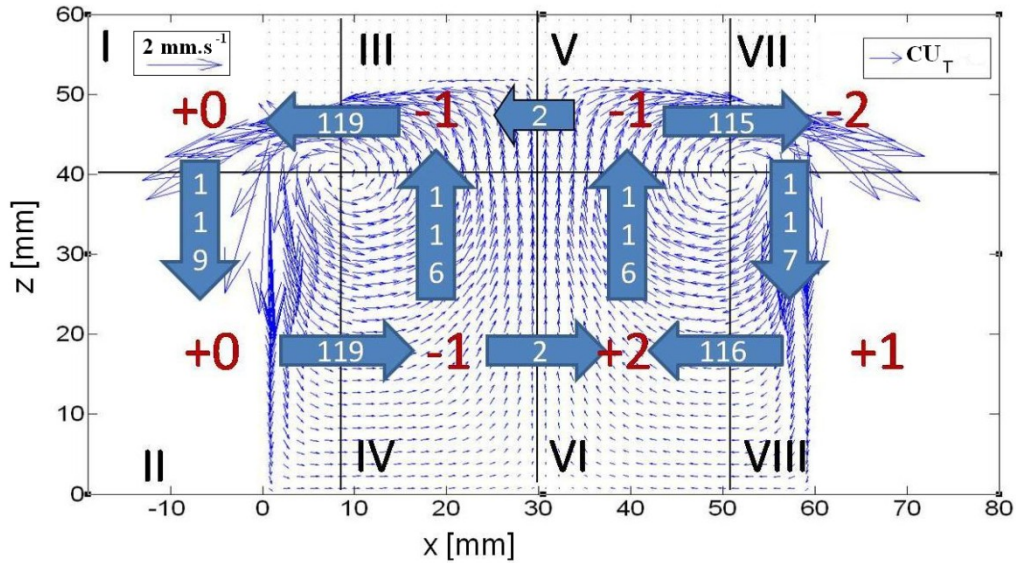


Figure 89. Cartographie des débits moyens en régime stationnaire (en  $\text{mm}^3.\text{s}^{-1}$ ). En bleu, valeur des débits. En rouge, bilan des flux entrants et sortants. La moyenne a été réalisée en régime stationnaire sur les cycles 300 à 700 pour  $\Gamma=3$  et  $f=50$  Hz. Projection en face Est

## VI.A.2 Etude de la sensibilité aux paramètres

Nous étudions ici l'influence de l'accélération, de la fréquence, de la longueur  $L_x$  de la boîte ainsi que du coefficient de friction sur le comportement du milieu granulaire vibré. En particulier, celui-ci sera caractérisé par la vitesse des grains en face Nord ainsi que par la densité locale et globale du milieu granulaire. Nous avons choisi de présenter en parallèle des résultats expérimentaux et de simulation. Les paramètres de simulation et d'expérience par défaut sont listés dans le Tableau 5. Rappelons que les deux principales différences entre l'expérience et la simulation sont la taille des grains en simulation ( $\langle d_g \rangle \approx 1 \text{ mm}$ ) qui est le double de la taille des grains dans l'expérience ( $\langle d_g \rangle \approx 0,5 \text{ mm}$ ) ainsi que le côté  $L_y$  qui est de  $80 \text{ mm}$  en expérience et de  $10 \text{ mm}$  périodique en simulation.

### VI.A.2.a Influence de l'accélération $\Gamma$ sur la vitesse et la compacité

Nous avons ici étudié de manière expérimentale et numérique (Figure 90) l'influence de l'accélération  $\Gamma$  sur la vitesse de déplacement des grains en face Nord en

considérant 4 situations où le milieu granulaire est en mouvement :  $\Gamma=1,5$ ,  $\Gamma=2$ ,  $\Gamma=3$ ,  $\Gamma=5$ . Cette étude a été réalisée à fréquence constante  $f=50\text{ Hz}$ . En comparant les profils de vitesse expérimentaux et numériques, nous remarquons que les profils de vitesse sont qualitativement les mêmes. En surface, les grains chutent rapidement puis la vitesse de chute diminue à mesure que les grains se rapprochent du fond de l'empilement granulaire.

Nous notons que la largeur du pic de vitesse calculé (Figure 90) augmente avec l'accélération  $\Gamma$ . Expérimentalement, la largeur à mi-hauteur varie de 4,5 mm environ pour  $\Gamma=1,5$  à 11,5 mm pour  $\Gamma=5$ . Dans la simulation, cette largeur de pic à mi-hauteur est plus grande et varie aussi de manière croissante avec  $\Gamma$ , soit 11,5 mm environ pour  $\Gamma=1,5$  à 15,5 mm pour  $\Gamma=5$ .

L'étude de l'influence de l'accélération a été synthétisée par l'observation d'une seule variable : la vitesse maximale en face Nord (Figure 91). En simulation et en expérience, la vitesse maximale en face Nord augmente linéairement avec l'accélération délivrée, sur l'intervalle  $\Gamma=[1,5;5]$  considéré.

Concernant le champ de compacité, la caractérisation expérimentale de la compacité en fonction de  $\Gamma$  a déjà été étudiée de manière exhaustive par Raihane ([50], III.B.1.b ). Nous avons pour notre part effectué une analyse numérique de l'influence de l'accélération  $\Gamma$  sur la compacité locale en fonction de l'altitude  $z$  considérée (celle-ci est difficile à évaluer expérimentalement de manière précise). Le diagramme de compacité (Figure 92) en fonction de  $\Gamma$  et de l'altitude a été obtenu de la manière suivante : 10 mesures numériques de compacité ont été effectuées pour les accélérations  $\Gamma=1,5$  ; 2 ; 3 et  $\Gamma=5$  aux altitudes  $z=2,5$  ; 7,5 ; ... ; 47,5 mm. Ensuite une interpolation bilinéaire permet de calculer une valeur de compacité pour chaque point de l'espace. Deux phénomènes sont à remarquer : pour les faibles accélérations ( $\Gamma<2$ ), la surface de l'empilement granulaire est compactée alors que le gain de compacité sur les couches profondes est plus faible. Pour les fortes accélérations ( $\Gamma>3$ ), le phénomène s'inverse : les couches de surface sont fluidisées alors que les couches profondes de l'empilement granulaire sont compactées. Ce phénomène est aussi constaté expérimentalement par Raihane ([49], Figure 46) qui retrouve un diagramme similaire de compacité en fonction de l'accélération et de l'altitude.

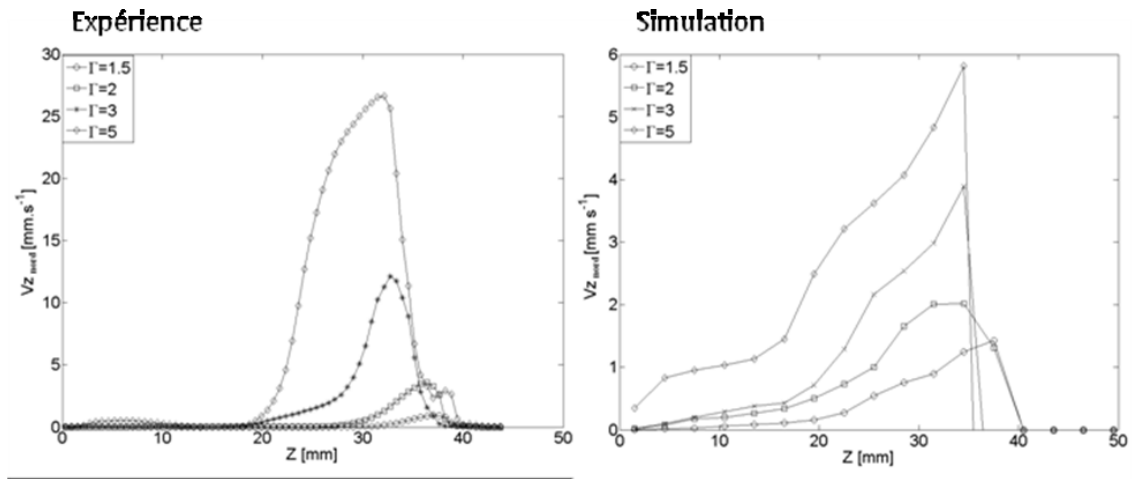


Figure 90. Profil de vitesse expérimentale et numérique en face Nord en fonction de  $\Gamma$  pour  $f=50$  Hz et  $L_x=40$  mm,  $L_y=80$  mm en expérience et  $L_y=10$  mm périodique en simulation

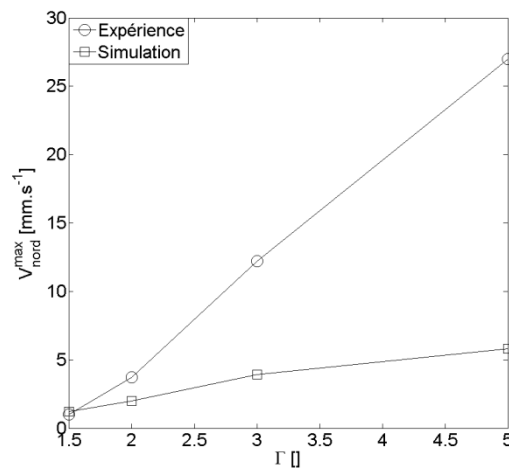


Figure 91. Evolution de la vitesse maximale en face Nord en fonction de  $\Gamma$ , résultats expérimentaux et numériques

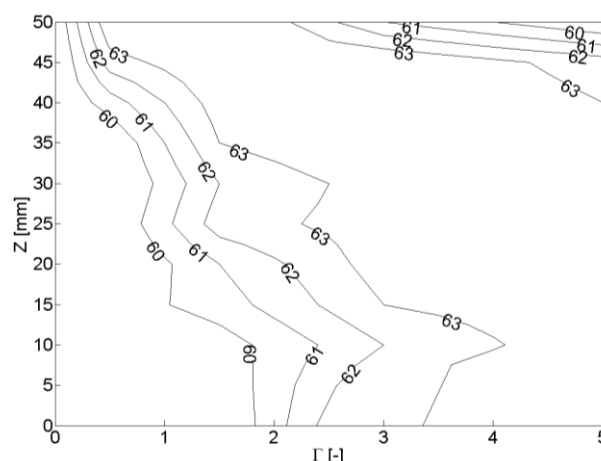


Figure 92. Evolution la compacité numérique (%) à l'état relaxé en fonction de l'altitude dans la boîte vibrée et  $\Gamma$

### VI.A.2.b Influence de l'accélération $\Gamma$ sur la compacité : étude complémentaire à l'aide du microtomographe

L'évaluation des densités locales en fonction de  $\Gamma$  est difficile à mener expérimentalement. Notre tomographe ne nous permet pas d'effectuer des mesures de compacité avec des objets de grandes dimensions comme la boîte utilisée précédemment de dimensions  $L_x=40\text{ mm}$  et  $L_y=80\text{ mm}$ . Pour pallier cette limitation, nous avons effectué des mesures de compacité à l'aide du microtomographe en utilisant une boîte de taille réduite, de dimensions intérieures  $L_x=15\text{ mm}$ \* $L_y=15\text{ mm}$  et de hauteur  $L_z=100\text{ mm}$ . La hauteur initiale du sable a été fixée à  $H_{ini}=80\text{ mm}$ . Le sable a été introduit en vrac par un entonnoir de  $10\text{ mm}$  de diamètre afin d'obtenir un état initial peu dense ( $C\approx 55\%$ ).

Les cartographies des compacités en fonction de l'altitude et de l'accélération délivrées sont présentées Figure 93. Nous remarquons que la compacité dépend essentiellement de l'altitude des grains. L'erreur de mesure dans cette analyse est assez grande (+/-) 1 %, ce qui est lié aux images en niveaux de gris issues du tomographe. Le traitement des images (ici 3D) permettant de distinguer les grains des espaces vides (« segmentation ») doit donc être effectué et reste délicat. Même si l'erreur absolue est relativement grande, les tendances sur les variations de compacité au sein d'une même mesure peuvent être considérées comme très fiables.

La compacité initiale varie entre 52 et 60 %. Quand le milieu granulaire est soumis à une accélération, les grains se compactent à toutes les altitudes avec un gain de compacité compris entre 4 et 14 % selon l'accélération et l'altitude. Contrairement à la

modélisation et aux résultats expérimentaux de la littérature, on n'observe pas ici la présence d'une zone au fond de l'empilement granulaire dont la compacité reste quasi identique à la compacité initiale. Des vibrations verticales parasites dans notre système vibré, mais aussi les défauts d'inhomogénéité initiale dus au remplissage « en vrac » pourraient être à l'origine de cette observation.

On note néanmoins une zone plus fortement compactée au niveau de la surface du de l'empilement ( $C > 63\%$ ) et une zone plus faiblement compactée en profondeur. Cette zone de surface de forte compacité mesure environ  $1\text{ cm}$  pour  $\Gamma=1$  et s'étend progressivement jusqu'à atteindre  $5\text{ cm}$  pour  $\Gamma=6$ . La compacité maximale rencontrée est proche de  $67\%$ .

Dans cette situation où une petite boîte est vibrée, la baisse de compacité à forte accélération au niveau de la surface est peu visible alors qu'elle était précédemment aisément constatée. Cette différence pourrait avoir pour origine une fluidisation du milieu granulaire plus faible pour des boîtes de taille réduite (nous verrons que c'est le cas).

Les grandes tendances, compaction forte de la zone supérieure et augmentation de la profondeur de cette zone avec  $\Gamma$ , présentées dans le paragraphe précédent, se retrouvent néanmoins dans cette analyse complémentaire.

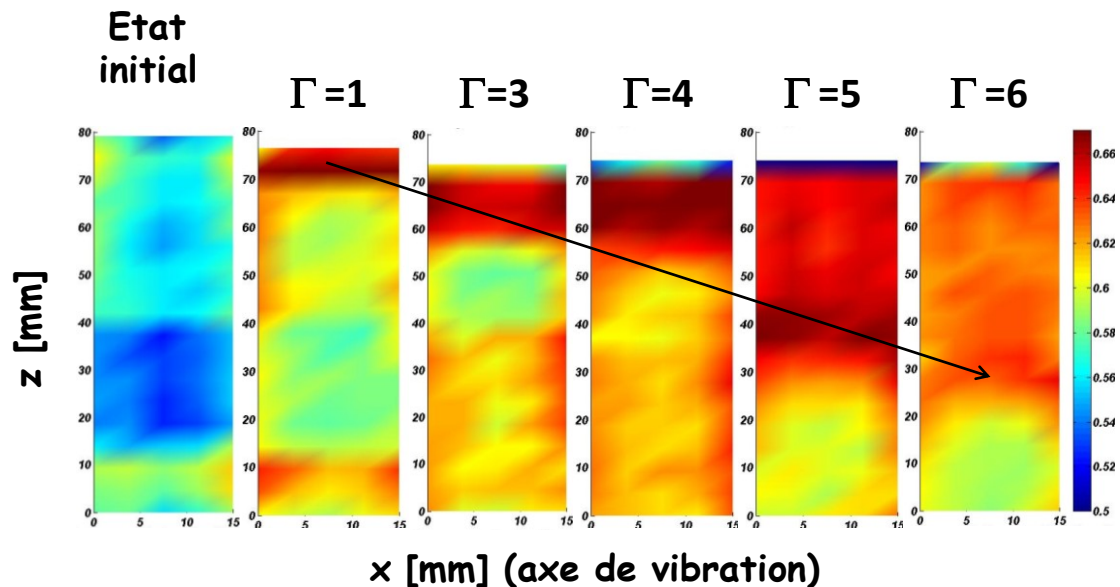


Figure 93. Mesure de la compacité locale en fonction de l'accélération effectuée à l'aide du microtomographe Nanotom de Phoenix|Xray. Vue face Est.  $f=50\text{ Hz}$

## VI.A.2.c Influence de la fréquence (simulation)

Nous avons réalisé une étude numérique de l'influence de la fréquence sur la compacité et le champ de vitesse dans le milieu granulaire vibré. Nous effectuons une analyse à accélération constante  $\Gamma=3$  et fréquence variable. Les autres paramètres sont identiques à ceux considérés à la section V.C.1 .

La vitesse de chute des grains décroît avec la fréquence  $f$  de vibration (Figure 94). Cette vitesse reste faible (vitesses de 4 à 7  $\text{mm.s}^{-1}$ ) pour les fortes fréquences (comprises entre 50 et 200  $\text{Hz}$ ) et forte (24  $\text{mm.s}^{-1}$ ) pour les faibles fréquences ( $f=20 \text{ Hz}$ ).

Remarquons qu'à accélération constante, l'amplitude de vibration est d'autant plus faible que la fréquence de vibration est faible. Ainsi, nous pensons que l'espace de faible densité créé aux parois est plus grand et maintenu plus longtemps pour les fréquences de vibrations plus faibles. Le temps de chute des grains peut alors devenir plus grand pour les faibles fréquences. Ceci permet d'expliquer qualitativement pourquoi la vitesse de chute des grains décroît quand la fréquence augmente.

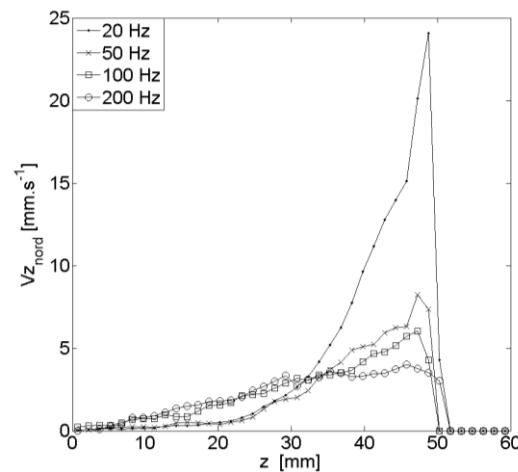


Figure 94. Profil de vitesse de chute en face Nord en fonction de la fréquence pour  $\Gamma=3$

Rappelons que la compacité initiale  $C_{ini}$  du milieu granulaire étudié était environ  $C_{ini} \approx 57,5\%$  (Figure 95). Nous retenons trois types de comportement du milieu granulaire de l'analyse des profils de compacité en fonction de la fréquence délivrée et de l'altitude (Figure 95) .

➤ Pour une fréquence  $f=20\text{ Hz}$  :

Le fond de l'empilement granulaire est compacté avec une compacité finale entre 60 et 62 % quand l'altitude  $z$  est comprise entre 0 et 30 mm. La partie supérieure de l'empilement granulaire présente des compacités finales comprises entre 57,5 et 60 % : la surface est plus faiblement compactée que pour les fréquences supérieures.

➤ Pour les fréquences  $f=50\text{ Hz}$  et  $f=100\text{ Hz}$  :

L'ensemble du milieu granulaire est assez fortement compacté avec des compacités finales comprises entre 61 et 62,5 %. On notera tout de même que la compacité finale est légèrement plus forte en surface et légèrement plus faible sur le fond de l'empilement granulaire.

➤ Pour la fréquence  $f=200\text{ Hz}$  :

La compacité finale obtenue est globalement plus faible que pour les autres fréquences et on notera dans ce cas une croissance quasi-linéaire de la compacité de 60 à 61,5 % entre le fond de l'empilement granulaire et la surface.

Pour  $f=20\text{ Hz}$ , on peut expliquer cette chute de compacité par les grandes vitesses de déplacement induites aux faibles fréquences. Le milieu étant fluidisé, sa compacité chute. Pour  $f=200\text{ Hz}$ , c'est l'effet inverse, le mouvement de convection a plus de mal à s'installer car les grains ont moins de temps pour tomber dans l'espace de faible densité créé le long des parois. Le faible gain de compacité s'explique surtout par des réarrangements locaux entre les grains et non par la mise en mouvement de l'ensemble du milieu granulaire.

Nous retiendrons aussi de cette analyse que les compacités les plus fortes et les plus homogènes (objectif industriel important) sont obtenues pour  $f=50$  et  $100\text{ Hz}$  pour lesquelles la convection permet au milieu granulaire de se réarranger complètement et où l'on évite le phénomène de fluidisation de la couche de surface conduisant à des baisses de densité. La fréquence d'étude que nous utilisons usuellement  $f=50\text{ Hz}$  est donc dans l'intervalle de fréquence intéressant. Rappelons que Raihane [49] a utilisé la fréquence de référence  $f=50\text{ Hz}$  pour laquelle il trouvait qu'une compaction du milieu granulaire dense et homogène était possible.

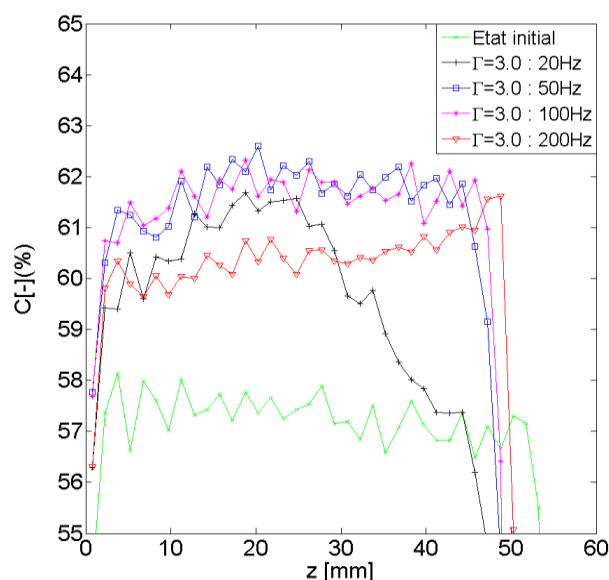


Figure 95. Profil de compacité pour les fréquences 20 Hz, 50 Hz, 100 Hz, 200 Hz avec  $\Gamma=3$

#### VI.A.2.d Influence de la longueur $L_x$ de la boîte

Dans cette étude, nous avons analysé l'influence des longueurs  $L_x$  de boîte pour une hauteur de sable initiale de 60 mm. Nous avons choisi de restreindre l'étude aux trois longueurs  $L_x=20$  mm,  $L_x=40$  mm,  $L_x=60$  mm et de présenter en parallèle les résultats expérimentaux et simulés. Le nombre de grains (4000 grains pour  $L_x=20$  mm, 8000 grains pour  $L_x=40$  mm, 12 000 grains pour  $L_x=60$  mm) est fixé pour limiter le temps de calcul ( $t_c < 24$  h). Le reste des paramètres est identique au jeu de paramètres présenté en section V.C.1. Nous constatons premièrement qu'expérimentalement la vitesse de chute des grains en face Nord croît linéairement avec la longueur de la boîte. On obtient des vitesses maximales de  $5 \text{ mm.s}^{-1}$  pour  $L_x=20$  mm,  $11 \text{ mm.s}^{-1}$  pour  $L_x=40$  mm,  $15 \text{ mm.s}^{-1}$  pour  $L_x=60$  mm (Figure 96). Dans le cas des simulations (Figure 96), les vitesses calculées sont plus faibles que dans l'expérience comme nous l'avons vu à la section V.C.4.a, si les diamètres de grain doublent, les vitesses de grain deviennent bien plus faibles. On trouve une même influence de la longueur de la boîte avec des vitesses croissantes avec celle-ci. On obtient des vitesses de chute en face Nord de  $2 \text{ mm.s}^{-1}$  pour  $L_x=20$  mm,  $2,5 \text{ mm.s}^{-1}$  pour  $L_x=40$  mm et  $5 \text{ mm.s}^{-1}$  pour  $L_x=60$  mm. La croissance est cette fois peu linéaire avec des différences de vitesses de chute faibles pour les cas  $L_x=20$  mm et  $L_x=40$  mm. On peut donc dire que de  $L_x=20$  mm à  $L_x=60$  mm, la vitesse de chute des grains en face Nord augmente avec la taille de la boîte, ceci est vérifié expérimentalement



et l'outil de simulation permet aussi de constater ce phénomène. On peut l'expliquer par la plus grande inertie de la masse totale des grains lors des déplacements latéraux lorsque la boîte est plus longue. Ceci conduit à une mise en mouvement du milieu granulaire plus facile comme présenté section III.B.2.a [94] et a pour conséquence des vitesses de convection plus grandes.

Au niveau du champ de compacité après vibrations, nous avons uniquement observé le champ de compacité numérique. Ces informations sont plus précises (uniquement des erreurs négligeables d'arrondis numériques) et plus détaillées (possibilité de visualiser un champ de compacité locale) que celles des mesures expérimentales. Le diagramme de compacité présenté Figure 97 a été obtenu grâce à une interpolation linéaire des valeurs de compacités locales pour  $L_x=20\text{ mm}$ ,  $L_x=40\text{ mm}$  et  $L_x=60\text{ mm}$ . Rappelons tout d'abord que la compacité initiale de l'empilement numérique était d'une compacité globalement homogène  $C_{ini}=57,5\pm0,5\%$ . Nous constatons que pour les petites valeurs de  $L_x$ , la surface de l'empilement granulaire est compactée ( $C(z=50\text{ mm})\approx63,5\%$ ) alors que le fond de l'empilement granulaire garde une compacité qui n'est que légèrement supérieure à la compacité initiale ( $C(z=10\text{ mm})\approx60\%$ ). Pour les fortes valeurs de  $L_x$ , la compacité de la surface du milieu granulaire est légèrement plus faible ( $C(z=50\text{ mm})\approx62,5\%$ ) alors que l'empilement granulaire est compacté jusqu'au fond de l'empilement ( $C(z=10\text{ mm})\approx63,5\%$ ).

On peut expliquer ces variations de compacité en considérant l'épaisseur de la couche mobile et l'intensité des vitesses au sein du milieu granulaire. Cette compacité est très faible pour les petites tailles de boîte et localisé en surface. Ainsi, les couches supérieures peuvent être compactées alors que les couches inférieures bloquées plus fortement peuvent garder une compacité plus proche de la compacité initiale. Pour les grandes tailles de boîte, les couches de grains peuvent gagner en compacité jusqu'au fond de l'empilement alors qu'une légère baisse de compacité peut se constater en surface. Cette baisse peut être imputée au fait que les grains sont très mobiles sur la couche de surface, ce qui induit une expansion du milieu granulaire et donc une chute de la compacité.

On remarquera que ce type d'évolution de la compacité en fonction de  $L_x$  est proche de l'évolution de la compacité en fonction de  $\Gamma$ . Le lecteur pourra mieux se rendre compte de cette assertion en observant les Figure 92 et Figure 97.

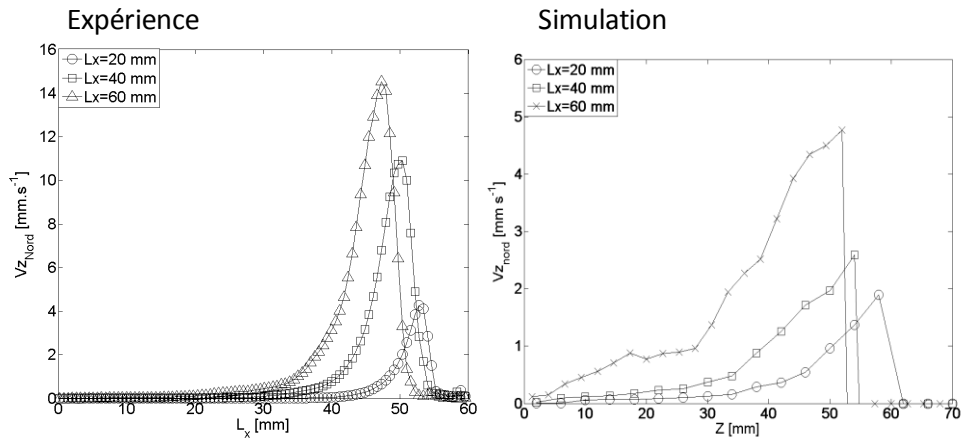


Figure 96. Résultats expérimentaux et numériques: influence de la taille  $L_x$  de la boîte sur les profils de vitesses en face Nord

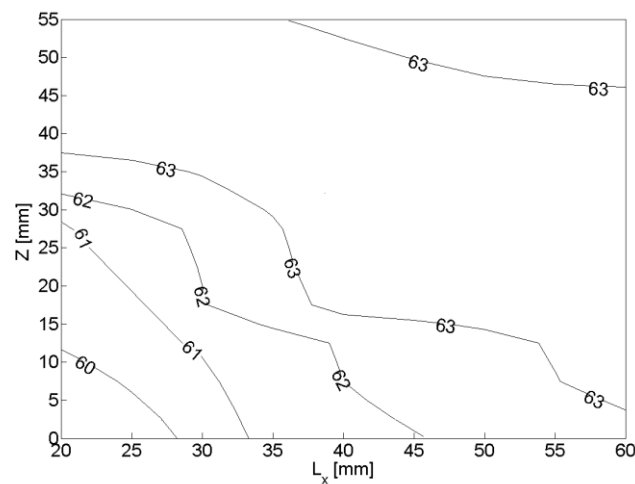


Figure 97. Diagramme des compacités relaxées en fonction de la longueur  $L_x$  de la boîte et de l'altitude  $z$ .  $f=50$  Hz et  $\Gamma=3$ , étude numérique

#### VI.A.2.e Influence des coefficients de friction : étude numérique

Nous étudions ici l'influence des coefficients de friction entre grains  $\mu_{g/g}$  et entre grain et mur  $\mu_{g/m}$  sur la vitesse maximale en face Nord et sur la compacité globale du milieu granulaire.

Premièrement, concernant l'influence sur la vitesse, nous avons réalisé deux études numériques. L'une montre l'influence du coefficient  $\mu_{g/g}$  en le faisant varier entre 0

et 1 et en fixant  $\mu_{g/m}=0,5$ , l'autre montre l'influence du coefficient de friction  $\mu_{g/m}$  en le faisant varier entre 0 et 1 et en fixant  $\mu_{g/g}=0,5$  (Figure 98). Deux choses sont à remarquer : premièrement, la vitesse des grains augmente avec l'un ou l'autre des coefficients de friction jusqu'à atteindre un plateau. Ce plateau vaut environ  $17 \text{ mm.s}^{-1}$  pour des coefficients de friction de l'ordre de 0,6.

Deuxièmement, quand  $\mu_{g/m}$  est proche de 0 et quand  $\mu_{g/g}=0,5$ , les vitesses restent très faibles : de l'ordre de  $2 \text{ mm.s}^{-1}$ . Un surprenant phénomène s'opère quand  $\mu_{g/g}$  est proche de 0 et quand  $\mu_{g/m}=0,5$  : la vitesse de chute en face Nord devient négative ! Cette inversion signifie que le sens des rouleaux de convection s'inverse pour les petits coefficients de friction entre grains, comme constaté Figure 99 pour  $\mu_{g/g}=0,1$ .

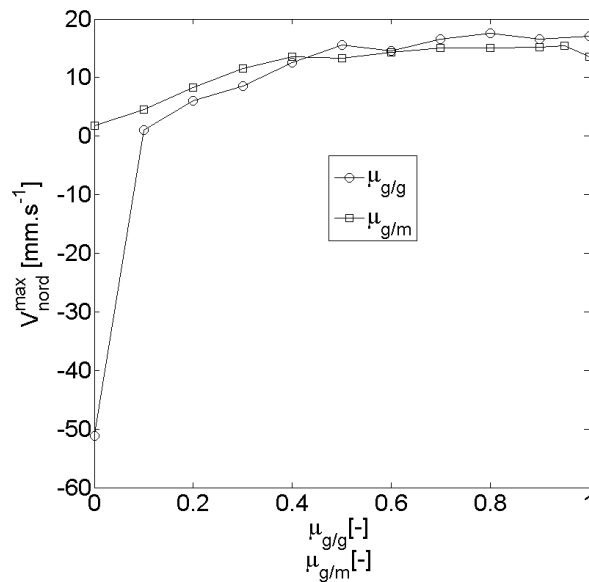


Figure 98. Influence des coefficients de friction inter grains  $\mu_{g/g}$  et entre grain et mur  $\mu_{g/m}$  sur la vitesse maximale en face Nord pour respectivement  $\mu_{g/m}=0,5$  et  $\mu_{g/g}=0,5$  fixés

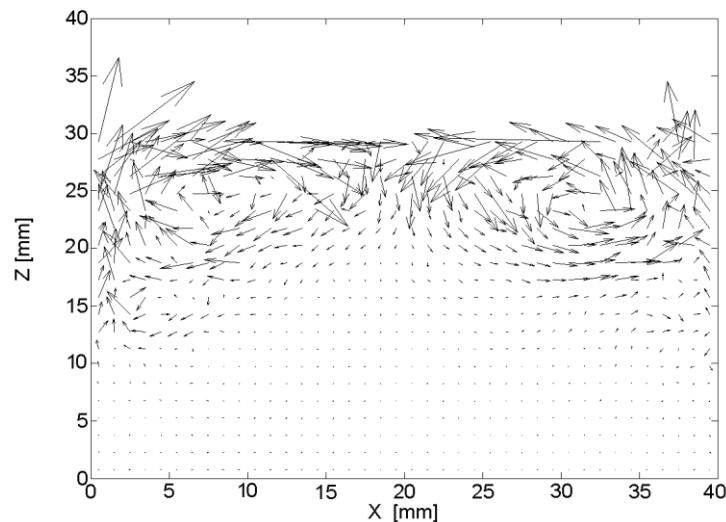


Figure 99. Inversion des rouleaux de convection observée quand  $\mu_{g/g}=0,1$  et  $\mu_{g/m}=0,5$

Concernant les compacités, nous avons étudié l'influence du coefficient de friction  $\mu_{g/g}$  (Figure 100). Les compacités initiales varient de 61,2% pour  $\mu_{g/g}=0,1$  à 56,9% pour  $\mu_{g/g}=1$ . Les compacités finales varient de 62,7 % pour  $\mu_{g/g}=0,1$  à 61,4% pour  $\mu_{g/g}=1$ . Cette décroissance de la compacité finale avec le coefficient de friction provient du fait que les réarrangements entre grains sont moins faciles quand la friction est plus forte. On remarquera que la différence de compacité quand on fait varier le coefficient de friction est plus forte à l'état initial qu'après vibration. Avant vibration, la différence de compacité est d'environ 4,5% et après vibration, elle n'est plus que de 1,5%. Ceci s'explique par le fait que les vibrations induisent une possibilité de réarrangement des grains et donc de compaction malgré le blocage dû aux frictions. Avant vibration, les grains sont tout de suite bloqués dans leurs déplacements par la friction, d'où une compacité beaucoup plus faible.

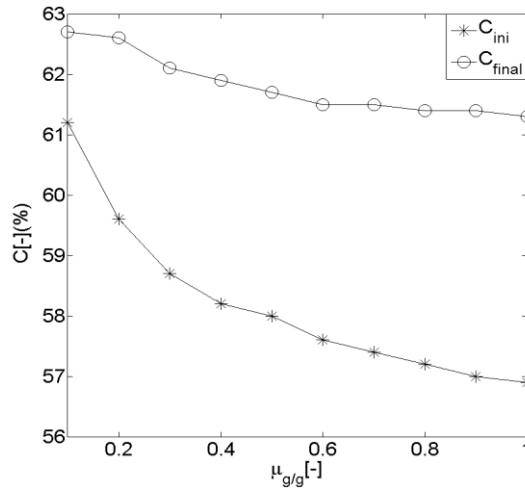


Figure 100. Etude numérique de l'influence du coefficient de friction inter-grains sur la compacité globale de l'empilement numérique finale et initiale (pour  $\mu_{m/g}=0,5$ )

### VI.A.3 Etude numérique des contraintes s'exerçant dans le milieu granulaire

#### VI.A.3.a Présentation qualitative des chaînes de force 2D

Nous faisons ici une première représentation qualitative des contraintes s'exerçant sur les grains en indiquant l'intensité des forces normales s'exerçant entre deux grains par l'épaisseur du vecteur branche reliant les grains en contact. Afin de bien visualiser les phénomènes rencontrés, nous avons lancé une simulation 2D avec peu de grains (500). Les grains de distribution uniforme en nombre ont des diamètres  $d_g$  compris entre 2 et 3 mm ( $2\text{ mm} < d_g < 3\text{ mm}$ ). La largeur de la boîte est  $L_x=60\text{ mm}$  et la hauteur de sable  $H_{sable}=40\text{ mm}$ . Les autres paramètres sont identiques au jeu de paramètres présenté en section V.C.1 .

Nous remarquons Figure 101 que vers les couches profondes, les contraintes suivent des chaînes de force privilégiées. Nous observons des lignes de grains fortement contraints sur le fond de l'empilement tandis que certains grains protégés, hors de ces chaînes de force, sont plus faiblement contraints. Notons que ces chaînes de forces peuvent parfois être à l'origine de voûtes pouvant créer des blocages dans les empilements granulaires.

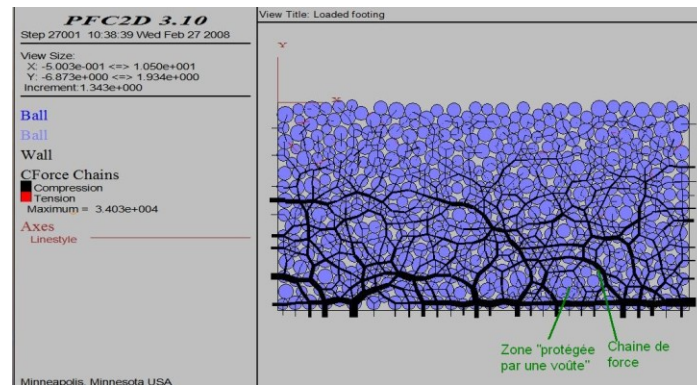


Figure 101. Chaînes de forces dans un empilement granulaire 2D.  $L_x=60 \text{ mm}$ ,  $H=40 \text{ mm}$ .  
Distribution uniforme avec  $2 \text{ mm} < d_g < 3 \text{ mm}$

### VI.A.3.b La représentation des contraintes sous forme de cercles de Mohr est-elle valable dans le cas dynamique ?

Nous savons que la théorie du Cercle de Mohr s'applique au cas d'un milieu granulaire statique. Cette étude a pour but de tester les outils développés dans cette théorie dans le cas dynamique. Le cas statique, et quatre accélérations seront testés,  $\Gamma=0,5$ ,  $\Gamma=1,5$ ,  $\Gamma=3$  et  $\Gamma=5$ . Nous précisons tout d'abord le protocole opératoire propre à ces expériences numériques ainsi que les principales formules utilisées. Nous examinons ensuite l'évolution des vitesses moyennes et instantanées dans les différents cas. Nous présentons enfin sous forme de cercle de Mohr les contraintes instantanées subies par le milieu granulaire dans les cas statique et dynamique. Nous nous appuyons sur la précédente description des vitesses de grains pour expliquer les évolutions rencontrées.

#### VI.A .3.b.i Protocole opératoire et définitions

L'ensemble des paramètres spécifiques à cette expérience numérique est le suivant : hauteur initiale  $H_{ini}=50 \text{ mm}$ , fréquence  $f=50 \text{ Hz}$ , coefficient de friction  $\mu_{b/b}=0,7$ , longueur de la boîte  $L_x=50 \text{ mm}$ , épaisseur du côté périodique  $L_y=10 \text{ mm}$ , taille moyenne des grains  $\langle d_g \rangle \approx 1$  (distribution uniforme en nombre avec  $900 \mu\text{m} < d_g < 1000 \mu\text{m}$ ). Les autres paramètres sont identiques au jeu de paramètres présenté section V.C.1 .

Le modèle numérique que nous utilisons permet d'estimer le tenseur des contraintes propre à chaque grain et ensuite de moyenner cette valeur sur un élément de volume (I.B .2.a.ii). Cinq cas seront considérés : le cas statique  $\Gamma=0$ , et les quatre cas où le milieu est accéléré avec pour accélérations adimensionnées imposées  $\Gamma=0,5$ ,  $\Gamma=1,5$ ,

$\Gamma=3$  et  $\Gamma=5$ . Nous testons ici l'utilisation de la théorie dite du cercle de Mohr dans le cas statique, et dans le cas où une partie du milieu granulaire ou tout son ensemble est mobile. La théorie de Mohr n'a pas été élaborée pour représenter les contraintes dans la partie mobile. Néanmoins, il est toujours possible de calculer des tenseurs des contraintes moyens ainsi que des contraintes principales maximales et minimales même lorsqu'une partie du milieu granulaire est mobile et les représentations sous forme de cercle de Mohr sont donc toujours possibles. Nous pourrions discuter du sens des résultats dans le cas dynamique.

La mesure de champ de contrainte est effectuée de manière instantanée au centième cycle de vibration quand la vitesse de déplacement de la boîte est maximale et orientée de gauche à droite (Figure 85). Avec les notations introduites à l'équation (V-2), en  $t_{100,2}$  avec  $N_T=2$ .

On obtient un tenseur des contraintes sur les 40\*40 cases dans les dimensions  $x$  et  $z$  du milieu continu équivalent (section V.B.5 ). Les tenseurs des contraintes calculés à partir du logiciel sont quasi-symétriques. Un tenseur des contraintes typique (ici localisé sur la couche du fond de l'empilement pour  $\Gamma=0,5$ ) est le suivant :

$$\Sigma[kPa] = \begin{bmatrix} [1,0272] & -0,0760 & [-0,0325] \\ -0,0760 & 1,2178 & 0,1524 \\ [-0,0323] & 0,1522 & [1,5795] \end{bmatrix} \quad (VI-3)$$

Pour une lecture des résultats plus facile, nous utiliserons uniquement la projection 2D de ces tenseurs des contraintes. Soit les composantes (1,1), (1,3), (3,1), (3,3) de la matrice ci-dessus (entre crochets). On notera cette nouvelle matrice  $\begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xz} \\ \tau_{zx} & \sigma_z \end{bmatrix}$  ou de manière équivalente  $\begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xz} \\ \tau_{xz} & \sigma_z \end{bmatrix}$  (par raison de symétrie). Nous pouvons alors tracer les contraintes dans le milieu granulaire sous forme de cercles de Mohr dont chacun est caractérisé par un centre de coordonnée  $\sigma_{moyen} = \frac{\sigma_x + \sigma_z}{2}$  et un rayon

$$R = \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_z}{2}\right)^2 + \tau_{xz}^2} \quad (I-26).$$

Avant d'aller plus loin, remarquons que pour un coefficient de friction entre grains  $\mu_{g/g}=1$ , on associe le coefficient de friction statique global  $\mu_s \approx 0,75$  (section V.C.5 ). De ce

fait, une règle de proportionnalité simple permet d'associer à un coefficient  $\mu_{g/g}=0,7$  un angle de talus statique de  $36,5^\circ$  ou encore un coefficient de friction statique approximé par  $\mu_s \approx 0,5$ . Une autre manière d'évaluer  $\mu_s$  est d'évaluer la droite passant par l'enveloppe des cercles de Mohr en situation de glissement (ou à la limite du glissement). On pourra se rendre compte que la droite de coulomb  $\tau = \mu_s \sigma$  (avec ici  $\mu_s=0,5$ ) suit cette enveloppe.

Une troisième variable d'analyse est alors utilisée : la distance entre les cercles de Mohr et la droite de Coulomb. La distance à la droite de Coulomb s'écrit (distance entre le centre du cercle et la droite de Coulomb à laquelle on retranche le rayon  $R$  du cercle de Mohr)

$$d_{coulomb} = \frac{\mu_s \sigma_{moyen}}{1 + \mu_s^2} - R \quad (VI-4)$$

Cette distance est d'autant plus grande que le milieu granulaire est dans son ensemble loin de la limite du glissement. En situation de glissement, cette distance est théoriquement nulle. Remarquons que même si le milieu granulaire est mobile, tous les grains ne sont pas forcément en situation de glissement. En effet, une couche de grain à une altitude  $z$  peut être mobile alors que certains grains de la couche restent bloqués parmi un ensemble de grains.

Un adimensionnement des contraintes est possible. On considère alors le rayon du cercle de Mohr et la distance à la droite de Coulomb relativement à la contrainte moyenne. En effet, l'état limite de glissement et l'effet des contraintes de cisaillements dépendent de la valeur relative de  $R$  et  $d_{coulomb}$  par rapport à  $\sigma_{moyen}$  plus que de leurs valeurs absolues. Ainsi, on introduit deux nouvelles variables adimensionnées :

$$\tilde{R} = \frac{R}{\sigma_{moyen}} \quad \text{et} \quad \tilde{d}_{coulomb} = \frac{d_{coulomb}}{\sigma_{moyen}} \quad (VI-5)$$

Nous appellerons dans la suite de cet exposé « profondeur » la distance entre la couche de grain considéré et la surface du milieu granulaire. Le lecteur fera attention à distinguer la profondeur mesure verticale à partir de la surface des grains de l'altitude  $z$  mesure verticale à partir du fond de la boîte.



## VI.A .3.b.ii Sur les vitesses de grains

## ♦ Vitesses moyennes

L'immobilité de la couche inférieure de l'empilement granulaire est constatée pour les accélérations  $\Gamma=0,5$  et  $\Gamma=1,5$  en observant les profils de vitesse par cycle de vibration en face Nord moyennés entre le 90<sup>ème</sup> et le 100<sup>ème</sup> cycle (Figure 102). On appellera couche mobile la zone où les grains ont des vitesses moyennes supérieures à  $0,02 \text{ mm.s}^{-1}$ . On établit une frontière entre la couche mobile et la couche solide pour une altitude  $z=20 \text{ mm}$  pour  $\Gamma=0,5$  et  $z=38 \text{ mm}$  pour  $\Gamma=1,5$ . Pour les accélérations  $\Gamma=3$  et  $\Gamma=5$ , on notera que l'ensemble du milieu granulaire est mobile selon nos critères, même si les vitesses au fond de l'empilement granulaire restent faibles.

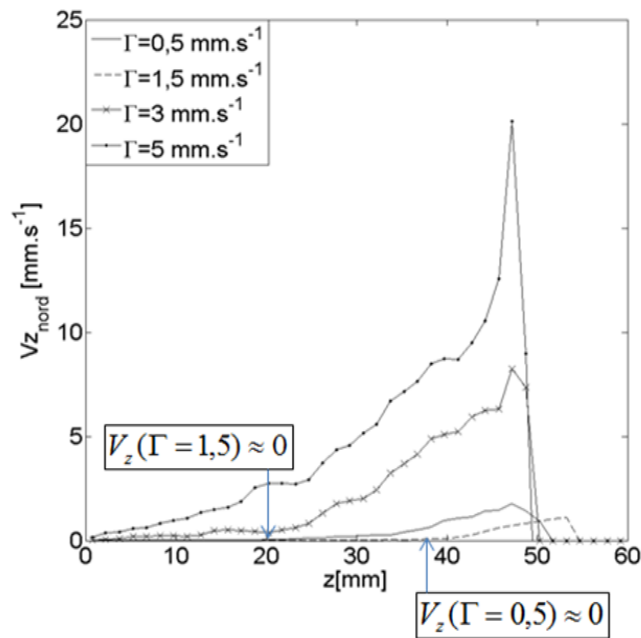


Figure 102. Vitesses moyennes en face Nord constatées sur les cycles 90 à 100 pour des accélérations adimensionnées allant de  $\Gamma=0,5$  à  $\Gamma=5$ . Critère pour considérer que la vitesse est nulle :  $V_z < 0,02 \text{ mm s}^{-1}$

## ♦ Vitesses instantanées

Les champs de vitesses instantanées sont présentées Figure 103. Rappelons que comme pour les mesures de contraintes, la mesure est effectuée quand la vitesse est maximale et que la boîte se trouve à mi-parcours entre les deux positions de butée (Figure 85). Une variable intéressante dans l'étude des contraintes sera l'inversion du

sens de déplacement des grains à une altitude donnée. Quand la boîte est accélérée de gauche à droite, les grains du fond de l'empilement peuvent avoir un mouvement relatif dans le même sens que l'accélération (comme s'ils rebondissaient contre le mur) alors que les grains des couches de surfaces subissent un cisaillement en sens inverse de l'accélération subie. Les frontières où les vitesses s'inversent sont repérées aux altitudes  $z=51\text{ mm}$ ,  $41\text{ mm}$ ,  $32\text{ mm}$ ,  $21\text{ mm}$ , pour  $\Gamma=0,5$  ;  $1,5$  ;  $3$  et  $5$  respectivement (Figure 103).

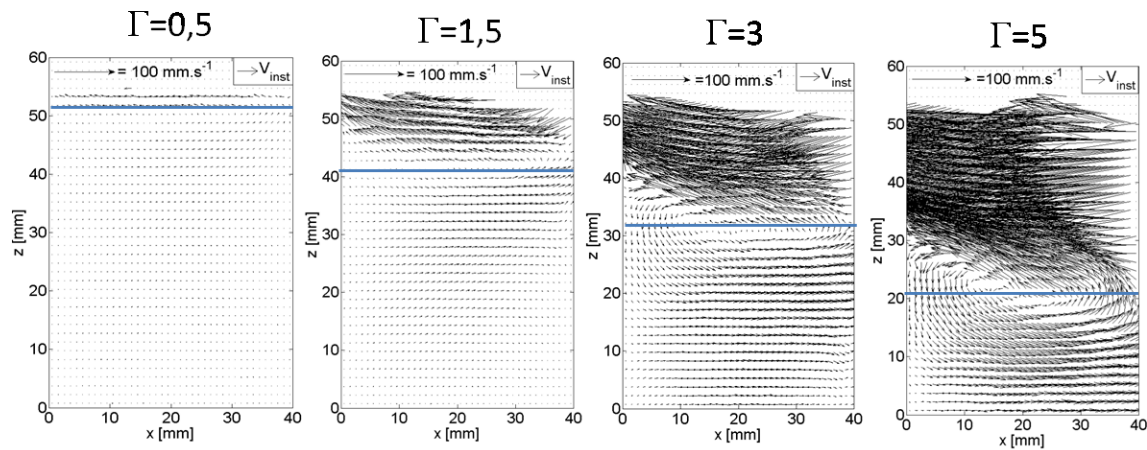


Figure 103. Champs de vitesses instantanées à  $f=50\text{ Hz}$ . La boîte vibrée se déplace de gauche à droite et la mesure de vitesse s'effectue à pleine vitesse à mi-parcours entre les deux positions de butée(soit d'après les notations introduites en (V-2), en  $t_{100,2}$  avec  $N_T=2$ ). On observe une inversion du sens de déplacement des grains pour une altitude  $z=51\text{ mm}$ ,  $41\text{ mm}$ ,  $32\text{ mm}$ ,  $21\text{ mm}$ , pour  $\Gamma=0,5$  ;  $1,5$  ;  $3$  et  $5$  respectivement

VI.A .3.b.iii Evolution et analyse des contraintes

◆ Etat initial : cas statique

Dans le cas statique, l'ensemble des cercles de Mohr pour les différentes altitudes sont à l'intérieur du cône de Coulomb (Figure 104). Ainsi, aucun glissement n'est à prévoir dans le cas statique et le milieu granulaire reste stable. Notons que ce type de visualisation est difficile à lire. En particulier, l'évaluation que l'on peut faire de l'altitude  $z$  constatée pour les différentes contraintes reste approximative. Notons néanmoins que les cercles de Mohr de grands diamètres et de contraintes moyennes fortes correspondent aux contraintes au fond de l'empilement et que les cercles de Mohr de petits diamètres et de contraintes moyennes faibles correspondent aux contraintes de surface.

Pour plus de précisions, nous observons alors l'évolution des trois variables caractéristiques des contraintes en fonction de l'altitude : la contrainte moyenne, le rayon du cercle de Mohr (ou la contrainte tangentielle maximale) et la distance entre le cercle de Mohr et la droite de Coulomb.

Les contraintes de cisaillement, la distance entre les cercles de Mohr et la droite de Coulomb sont représentées sur la Figure 105. La contrainte moyenne  $\sigma_{moyen}$  évolue linéairement avec la profondeur (Figure 105.a). Elle est nulle en surface et atteint 1050 Pa vers le fond de l'empilement. Remarquons que si l'on effectue l'approximation de Janssen pour les faibles hauteurs de grain (I.B .2.a.v), on aura une évolution de type hydrostatique de la pression avec la profondeur :

$$p^{th}(z=0) = C(z=0)\rho_g g h_{ini} \quad (VI-6)$$

Où  $C$  est la compacité moyenne de l'empilement,  $\rho_g$  la densité de grains,  $g$  l'accélération de la pesanteur, et  $h_{ini}$  hauteur de sable. En prenant  $C=57,5\%$  (Figure 107), et  $\rho_g = 2700 kg.m^{-3}$ , la pression théorique au fond de l'empilement granulaire vaut  $p^{th}(z=0) \approx 775 Pa$ . La pression établie numériquement par la méthode DEM vaut quand à elle (V-21):

$$p(z=0) = C(z=0) * \sigma_{moyen}(z=0) \quad (VI-7)$$

La contrainte moyenne au fond de l'empilement est estimée à 1050 Pa (on ne considère pas la légère décroissance au plus près du fond de la boîte qui est un artefact numérique). La compacité au fond de l'empilement est toujours de 57,5 %. En utilisant la

formule précédente, on retrouve alors la pression numérique supposée au fond de l'empilement granulaire  $p(z=0) \approx 600 \text{ Pa}$ . Remarquons que cette pression suit comme la contrainte moyenne une croissance linéaire avec la profondeur ; avec la compacité en facteur de proportionnalité. Cette pression calculée numériquement est assez proche de la pression isostatique et suit une loi d'évolution similaire mais reste inférieure de 23 % à celle-ci. Nous ne sommes pas en mesure d'expliquer cette variation. Nous supposons néanmoins qu'elle est due au mode de calcul de la contrainte dans le logiciel PFC.

Le rayon du cercle de Mohr correspondant à la contrainte de cisaillement maximale observée au niveau des grains (Figure 105.b) évolue comme la contrainte moyenne, c'est-à-dire linéairement avec la profondeur. La pression des grains plus forte induit aussi un cisaillement plus grand en profondeur. Néanmoins, ce cisaillement plus grand n'induit pas de déséquilibre du milieu granulaire dans le cas statique. En effet, les contraintes moyennes étant plus grandes en profondeur, il en découle que la distance à la droite de Coulomb est elle aussi plus grande (Figure 105.c).

Les contraintes de cisaillement, la distance entre les cercles de Mohr et la droite de Coulomb adimensionnées par la contrainte moyenne sont représentées sur la Figure 106. A l'aide de cette adimensionnement, on remarque l'existence de deux zones. Une première couche de surface de l'ordre de 2-3 mm soit 2-3 tailles de grains où la contrainte de cisaillement adimensionnée et la distance au cône de Coulomb augmentent brutalement. Plus bas, dans le reste de l'empilement, une zone où contrainte de cisaillement et distance au cône de Coulomb varient peu. Nous notons tout de même une légère croissance de la contrainte de cisaillement maximale adimensionnée (Figure 106.b) et une légère diminution de la distance relative au cercle de Mohr (Figure 106.c).

L'équilibre relatif des grains serait moins grand sur le fond de l'empilement. Ceci pourrait s'expliquer par le mode de construction de l'empilement (sédimentation en bloc). Nous proposons une hypothèse expliquant ces variations. Les réarrangements de grains sur le fond de l'empilement étant empêchés par les couches supérieures, les états d'équilibre constatés au niveau des grains sur le fond resteraient plus précaires. Rappelons néanmoins qu'en valeur absolue, la contrainte nécessaire pour passer au point de rupture, reste plus grande au fond de l'empilement granulaire.

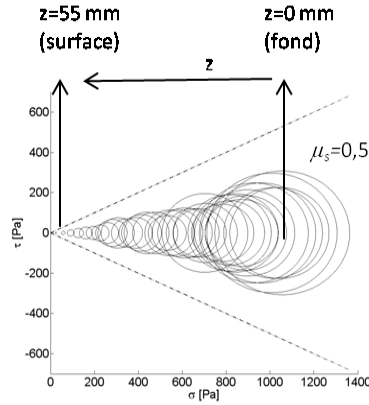


Figure 104. Ensemble des cercles de Mohr observés à différentes altitudes pour l'état statique: pas de glissement. Vers la gauche, partie supérieure de l'empilement granulaire. Vers la droite, fond de l'empilement granulaire.

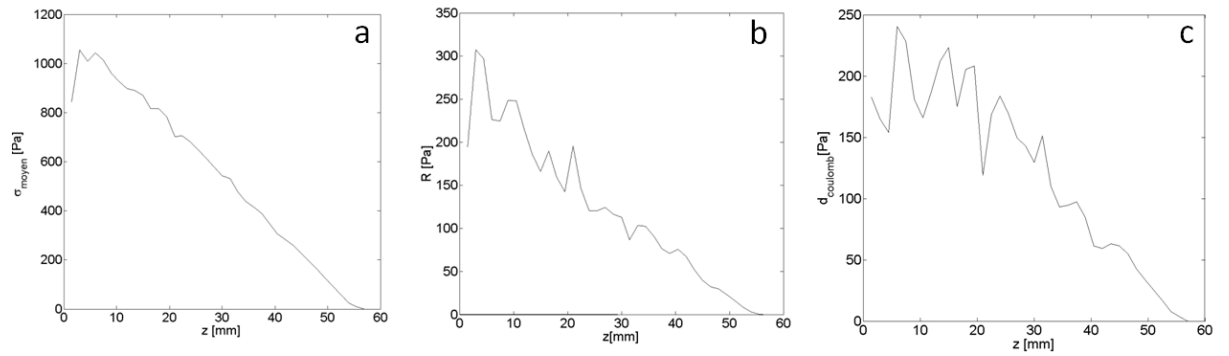


Figure 105. Représentation non adimensionnée de l'état des contraintes en milieu statique. Tenseur de contraintes moyennes (a), rayons des cercles de Mohr (b) et distance à la droite de Coulomb (c)

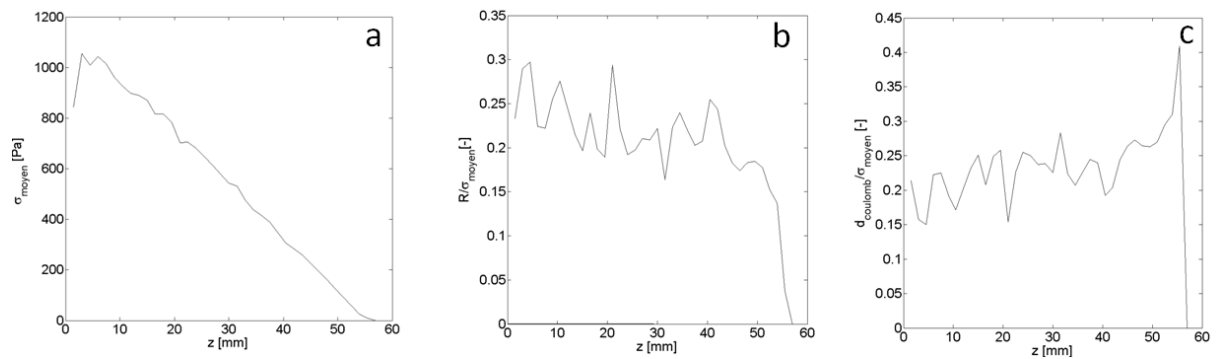


Figure 106. Etat statique. Tenseur des contraintes moyens (a), rayons des cercles de Mohr adimensionnés (b) et distance à la droite de Coulomb adimensionnée (c)

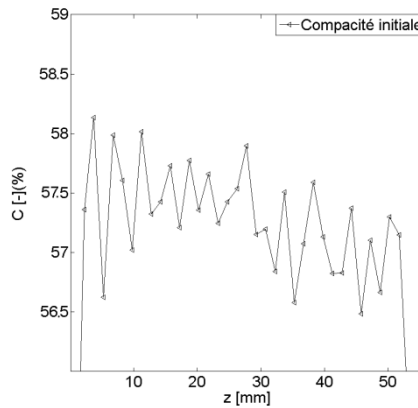


Figure 107. Compacité du milieu granulaire en fonction de l'altitude  $z$  dans le cas statique

◆ Milieu granulaire vibré :  $\Gamma=0,5$ ,  $\Gamma=1,5$ ,  $\Gamma=3$ ,  $\Gamma=5$

Dans cette étude, nous considérons deux frontières en fonction de l'altitude qui distinguent deux types de comportement des grains. La première de ces frontières distingue la zone mobile de la zone solide. Rappelons que cette frontière se trouve à  $z=38 \text{ mm}$  pour  $\Gamma=0,5$  et à  $z=20 \text{ mm}$  pour  $\Gamma=1,5$ . Elle n'existe pas pour les accélérations supérieures car l'ensemble du milieu granulaire est alors en mouvement. La deuxième frontière concerne toutes les accélérations et correspond à l'altitude de démarcation entre les vitesses orientées vers la gauche et vers la droite pour une mesure de vitesse instantanée (voir plus section précédente). Les frontières où les vitesses s'inversent se trouvent aux altitudes  $z=51 \text{ mm}$ ,  $41 \text{ mm}$ ,  $32 \text{ mm}$ ,  $21 \text{ mm}$ , pour  $\Gamma=0,5$  ;  $1,5$  ;  $3$  et  $5$  respectivement (Figure 103).

Concernant la zone séparant les grains mobiles des grains immobiles et pour  $\Gamma=0,5$  et  $\Gamma=1,5$  respectivement, nous constatons que la frontière entre les grains mobiles et immobiles correspond à une zone de cisaillement très faible et une distance à la droite de Coulomb forte. En effet, à cette altitude, l'influence du cisaillement de force due au déplacement de la paroi du fond ne se ressent pas. De plus, le cisaillement dû au déplacement des grains est nul puisque les vitesses de déplacement des grains sont elles aussi nulles. Ainsi, en cette zone frontière, la taille des cercles de Mohr correspondant au cisaillement est très petite et la distance au cône de Coulomb correspondant à la limite de glissement reste très grande.

Tout d'abord, remarquons que l'enveloppe de Coulomb (zone de glissement) se situe sur une droite d'équation  $\tau = \mu_s \sigma$  avec  $\mu_s \approx 0,5$  (section VI.A .3.b.i) pour toutes les accélérations (Figure 109, Figure 111, Figure 113, Figure 115). Les zones de glissement apparaissent proches de la surface pour  $\Gamma=0,5$  et  $\Gamma=1,5$  et atteignent des couches plus profondes de l'empilement pour  $\Gamma=3$  et  $\Gamma=5$ . Ces zones peuvent être observées de manière plus précise en observant la distance à la droite de Coulomb qui s'annule lorsque l'ensemble des grains à une altitude donnée adopte un comportement de glissement.

Pour toutes les accélérations (Figure 108, Figure 110, Figure 112, Figure 114), nous constatons que la ligne de démarcation entre les vitesses orientées vers la gauche et vers la droite correspond à une zone où les contraintes de cisaillement sont très fortes et la distance au cône de Coulomb est nulle. Ceci signifie qu'en cette zone tous les grains sont en situation de glissement. En effet, les vitesses de grains voisins sont toutes différentes à ce niveau. Ainsi, il existe un fort cisaillement dû au déplacement des grains et la limite de Coulomb est atteinte en tout point aux altitudes où les vitesses s'inversent.

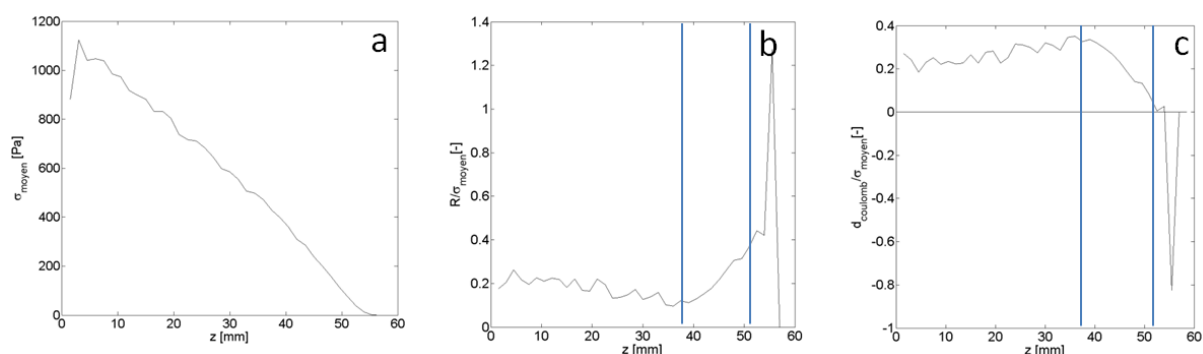


Figure 108  $\Gamma=0,5$ . Tenseur des contraintes moyens (a), rayons des cercles de Mohr adimensionnés (b) et distance à la droite de Coulomb adimensionnée (c)

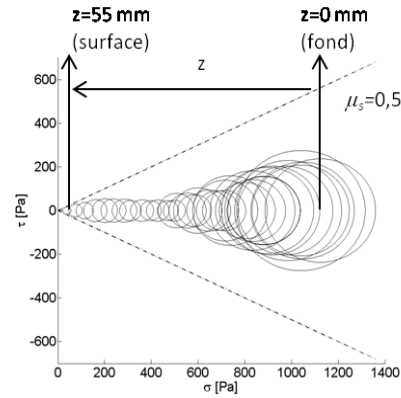


Figure 109. Ensemble des cercles de Mohr observés à différentes altitudes pour  $\Gamma=0,5$ . Vers la gauche, partie supérieure de l'empilement granulaire. Vers la droite, fond de l'empilement granulaire.

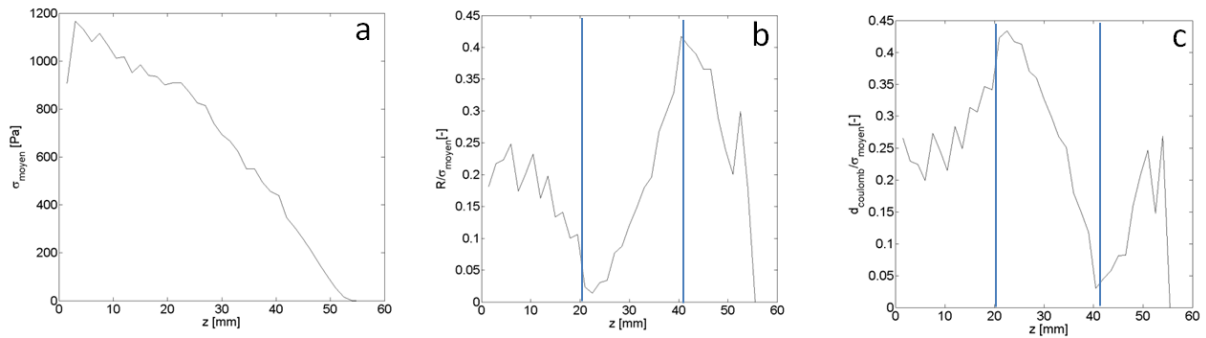


Figure 110.  $\Gamma=1,5$ . Tenseur des contraintes moyennes (a), rayons des cercles de Mohr adimensionnés (b) et distance à la droite de Coulomb adimensionnée (c)

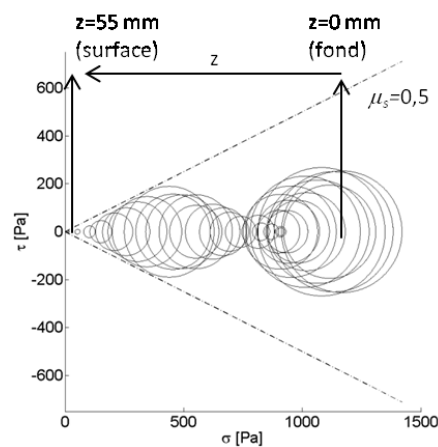


Figure 111 Ensemble des cercles de Mohr observés à différentes altitudes pour  $\Gamma=1,5$ . Vers la gauche, partie supérieure de l'empilement granulaire. Vers la droite, il n'y a pas forcément correspondance entre la position des cercles et la profondeur



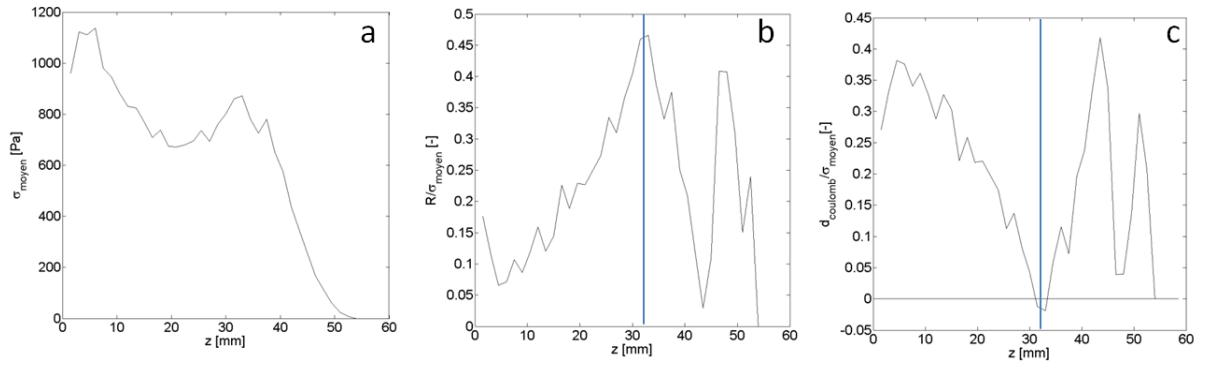


Figure 112.  $\Gamma=3$ . Tenseur des contraintes moyens (a), rayons des cercles de Mohr adimensionnés (b) et distance à la droite de Coulomb adimensionnée (c)

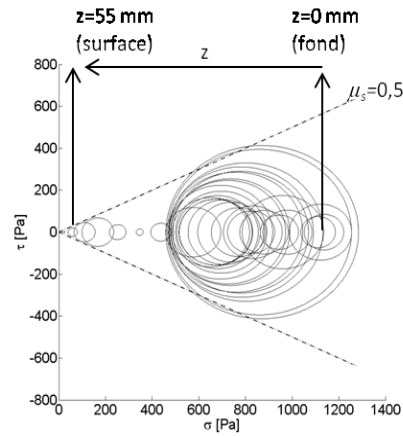


Figure 113. Ensemble des cercles de Mohr observés à différentes altitudes pour  $\Gamma=3$ . Vers la gauche, partie supérieure de l'empilement granulaire. Vers la droite, il n'y a pas forcément correspondance entre la position des cercles et la profondeur

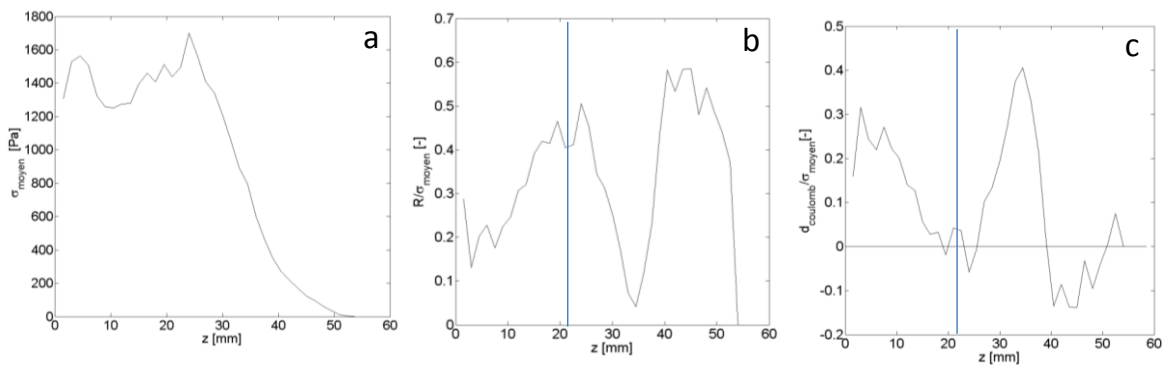


Figure 114.  $\Gamma=5$ . Tenseur des contraintes moyens (a), rayons des cercles de Mohr adimensionnés (b) et distance à la droite de Coulomb adimensionnée (c)

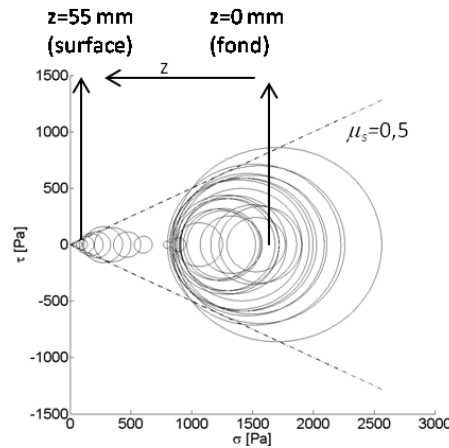


Figure 115 Ensemble des cercles de Mohr observés à différentes altitudes pour  $\Gamma=5$ . Vers la gauche, partie supérieure de l'empilement granulaire. Vers la droite, il n'y a pas forcément correspondance entre la position des cercles et la profondeur



#### A retenir sur l'étude des contraintes

- La contrainte moyenne, comme la pression, augmente de manière linéaire avec la profondeur.
- Une zone où le cisaillement est très faible se trouve à la frontière entre la zone solide et la zone mobile pour  $\Gamma=0,5$  et  $\Gamma=1,5$ .
- Une zone de glissement total où la contrainte de coulomb est nulle se retrouve en observant les champs de vitesse instantanée à mi-parcours. L'altitude délimitant la limite où les grains se déplacent dans le sens du mouvement de la boîte et dans le sens opposé correspond à une zone de glissement total (tous les grains sont en situation de glissement). Ceci est vérifiée pour toutes les accélérations étudiées, soit  $\Gamma=0,5, 1,5, 3, 5$ .

L'utilisation des représentations des contraintes sous la forme des cercles de Mohr en régime dynamique paraît pertinente. Elle se montre en effet cohérente avec certains comportements caractéristiques du milieu granulaire comme les variations de vitesse en son sein.

#### VI.A.4 Phénomène de ségrégation

Aucune ségrégation n'a été constatée expérimentalement. Nous avons réalisé des prélèvements de sable sur le haut de l'empilement granulaire, le bas de l'empilement granulaire et sur les deux bords latéraux contre les murs Nord et Sud. Dans les 4 cas, la distribution granulométrique reste identique à celle de l'échantillon initial (section VI.A.2 ).

Numériquement, nous avons effectué une expérience où un milieu granulaire est soumis pendant 18 secondes à des vibrations (Figure 116) présentant les diamètres moyens des grains dans la boîte en fonction de leurs positions. Les paramètres utilisés sont ceux présentés en section V.C.1 . On constate néanmoins à la Figure 117 une augmentation de la taille des grains sur les bords de la boîte, mais l'ordre de grandeur de la différence de taille de grain ( $+0,04 \text{ mm}$ ) est si faible qu'on ne peut pas vraiment parler de ségrégation.

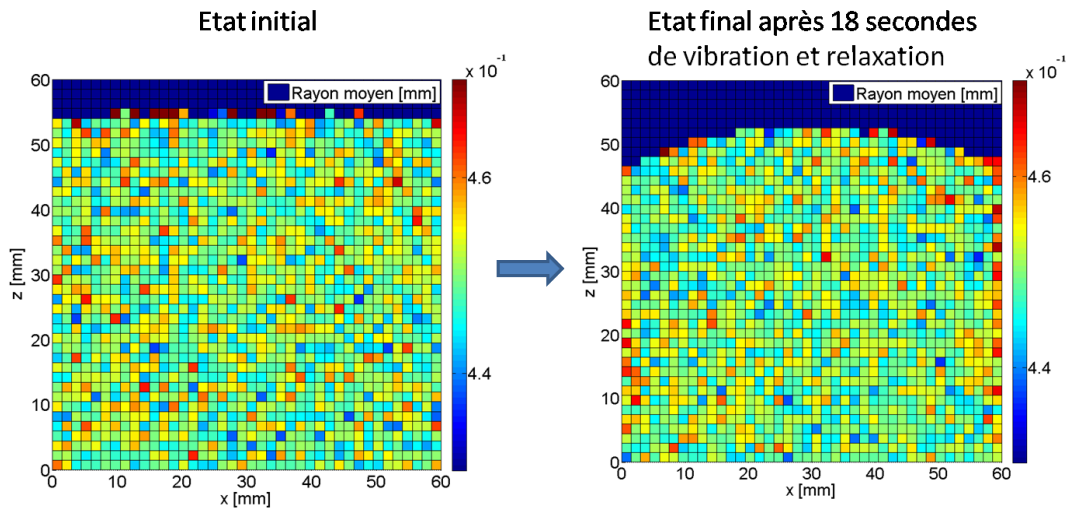


Figure 116. Cartographie des rayons moyens à l'état initial et après 18 secondes de vibrations

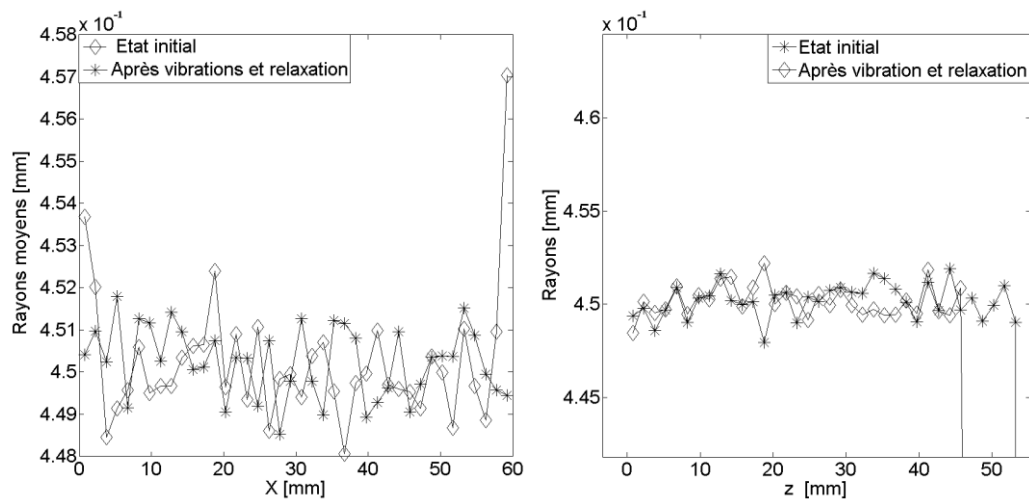


Figure 117. Profil des rayons moyens en fonction de la largeur et de l'altitude

## VI.B Travaux expérimentaux sur l'écoulement des grains dans un milieu granulaire vibré

Les obstacles présents dans les fusibles (lames de cuivre ou d'argent) induisent des problèmes d'écoulement de grains lors du remplissage à travers des espaces de section réduite. Ainsi, pour caractériser la coulabilité des grains à travers ces fines ouvertures, on a entrepris des travaux pour caractériser *l'écoulement* des grains à travers des orifices en fonction de la position, de l'aire de la surface de l'ouverture et des paramètres de vibration les plus usuels : fréquence et accélération.



Figure 118. Vue en coupe du sable contenu dans un fusible MERSEN. Le fusible céramique est parallélépipédique de base carrée de côté 60 mm. Les lames d'argent ont été rabattues à plat sur le sable afin de faciliter leur visualisation

### VI.B.1 Influence de l'aire de la surface d'écoulement

Nous étudions premièrement l'influence de l'aire de l'orifice à travers lequel s'écoulent les grains. On considère un orifice tronc-conique dont le diamètre intérieur, du côté amont de l'écoulement, varie de 1 à 10 *mm*, et de hauteur 10 *mm*. Du côté aval, l'angle de sortie approche les 80 degrés. Le diamètre de sortie est voisin de 10 *mm*. Ceci permet d'éviter les phénomènes de blocage que subiraient les grains s'ils avaient à traverser un « tunnel » cylindrique (Figure 119).

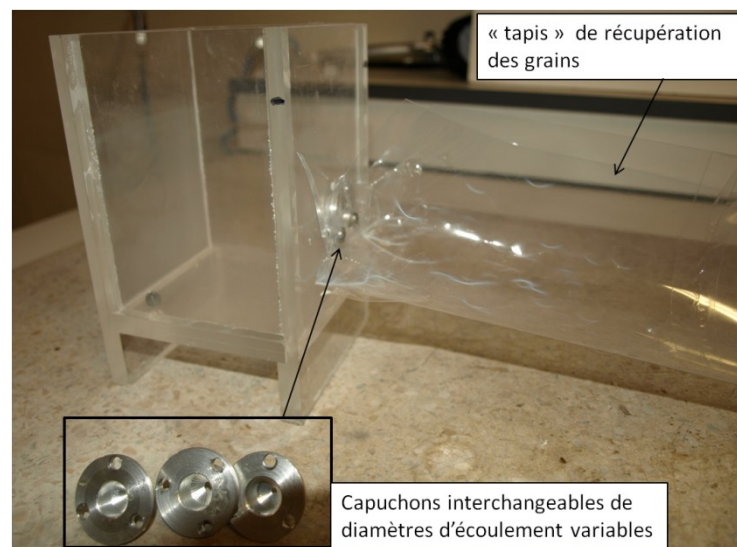


Figure 119. Photo de la boîte utilisé pour caractériser l'influence de l'aire de la surface d'écoulement et des capuchons de sorties interchangeables

Nous estimons que dès qu'un grain a passé l'orifice intérieur, il chute immédiatement dans le réceptacle de mesure de débit.

Cette étude a été réalisée à l'aide d'une boîte de base carrée 80\*80 *mm* et de 120 *mm* de hauteur dont les parois sont faites de plexiglas de 10 *mm* d'épaisseur. Les trous ont été placés au centre de l'une des faces à une hauteur  $H_0=40$  *mm* au dessus du fond de la boîte. Les hauteurs de sables utilisées  $h_{sable}$  sont de 50, 60, 80, 90 et 100 *mm*, soit une hauteur de sable au-dessus du centre du trou d'écoulement  $h_t$  de 10, 20, 30 et 40 *mm* (Figure 120). On peut positionner le trou d'écoulement sur la face Est ou la face Nord. La fréquence imposée  $f$  est de 50 *Hz* et l'accélération adimensionnée  $\Gamma$  vaut 3. On a choisi de moyenner les débits  $q$  pour les différentes hauteurs de sable  $h_t$  au-dessus du trou d'écoulement, afin de se focaliser uniquement sur l'influence du diamètre du trou permettant l'écoulement, l'influence de la position du trou est étudiée dans la section

suivante. Les diamètres  $d_{trou}$  étudiés mesurent 1, 2, 3, 5, et 10 mm (aucun écoulement n'est constaté pour des diamètres inférieurs). L'erreur relative de mesure sur les débits a été estimée à  $\pm 20\%$ . Cette imprécision est principalement due à la faible durée pendant laquelle doivent être effectuées les mesures d'écoulement. En effet, lors d'une expérience, la hauteur de grain variant légèrement avec le temps, il faut effectuer les prises de mesure relativement rapidement (5 secondes) afin d'éviter une variation d'altitude supérieure à 2 mm. Les grandes tendances sur les débits de grains peuvent néanmoins se retrouver malgré cette imprécision.

Selon que le trou se situe en face Est ou en face Nord, des évolutions similaires du débit en fonction du diamètre du trou sont observées (Figure 121 et Figure 122).

*Pour les diamètres compris entre 1 et 3 mm, on remarque une très forte croissance du débit  $q$  avec le diamètre  $d_{trou}$ , avec une loi puissance  $q = d_{trou}^n$ .  $n$  est de l'ordre de 5 en face Est, et de 4 en face Nord.*

*Pour les diamètres supérieurs à 3 mm, la variation du débit est parabolique ( $n=2$ ) en face Nord et Est. Le débit semble alors proportionnel à la surface d'écoulement pour des orifices suffisamment grands. Cette loi est caractéristique de l'écoulement d'un fluide non visqueux et on peut considérer que le milieu granulaire se comporte globalement comme tel pour des surfaces d'écoulements assez grandes. Cette étude reste à approfondir, car la gamme de diamètres où ce phénomène est constaté est assez restreinte ( $d_{trou}$  varie de 3 mm à  $d_{trou}=10$  mm en face est et Nord). Pour les surfaces plus faibles, un effet d'exclusion stérique dû aux bords du trou est certainement la cause de la minoration du débit. En fait, on ne constate aucun écoulement (ou des écoulements intermittents) pour des diamètres de trous inférieurs à 1 mm, soit le double du diamètre moyen des grains référencés sable 2 (distribution granulométrique présentée section IV.B.3.a ).*

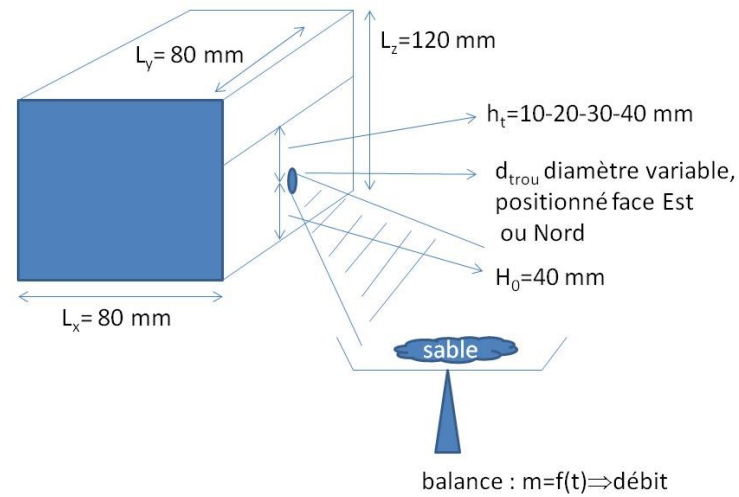


Figure 120. Représentation schématique de la boîte percée utilisée pour caractériser les écoulements de grains

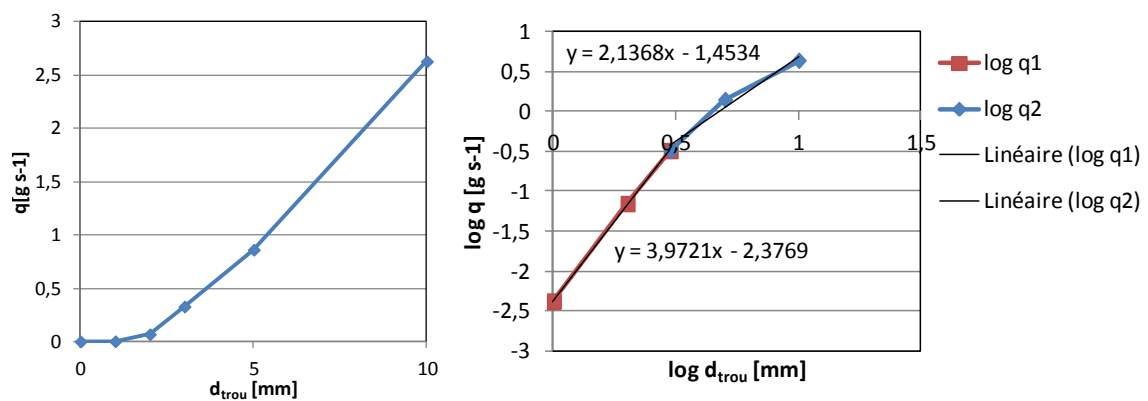


Figure 121. Variation du débit en face Est en fonction du diamètre d'entrée de l'orifice. À droite, échelle logarithmique

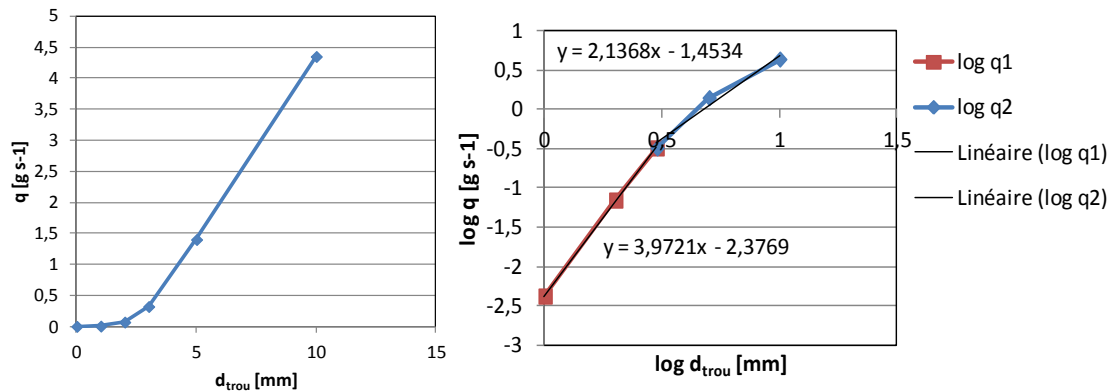


Figure 122. Variation du débit en face Nord en fonction du diamètre d'entrée de l'orifice.  
À droite, échelle logarithmique

## VI.B.2 Influence du positionnement et des paramètres procédés

Dans cette expérience, nous utilisons une boîte de dimensions  $L_x=40 \text{ mm}$ ,  $L_y=80 \text{ mm}$ ,  $L_z=120 \text{ mm}$ , d'épaisseur  $10 \text{ mm}$  (Figure 123). Elle est percée de quatre trous de diamètres identiques et de forme tron-conique. Le diamètre intérieur de l'orifice est  $d_{\text{trou}}(\text{amont})=1,5 \text{ mm}$ , celui extérieur  $d_{\text{trou}}(\text{aval})=5 \text{ mm}$  et la hauteur du tronc  $H_{\text{tronc}}=5 \text{ mm}$ . Les trous sont tous situés à une altitude  $z=5 \text{ mm}$ . Trois sont placés sur la face Est et un sur la face Nord. Les hauteurs de sable au dessus du centre des trous ont été fixées successivement à  $h_t=10, 20, 30, 40$  et  $60 \text{ mm}$ .

Nous estimons que dès qu'un grain a passé l'orifice intérieur (trou amont), il chute immédiatement dans le réceptacle de mesure de débit.

Sur la face Est, les trous sont disposés à  $5 \text{ mm}$  du bord gauche de la boîte, à  $20 \text{ mm}$  et à  $40 \text{ mm}$  (centre de la boîte) et à une altitude de  $5 \text{ mm}$ . On suppose que les écoulements sont symétriques par rapport à un plan vertical passant par le milieu de la face Est. Ainsi, pour la partie droite, les débits, à  $60$  et  $75 \text{ mm}$  du bord gauche correspondent à ceux constatés respectivement à  $20$  et  $5 \text{ mm}$  du bord gauche.

En face Nord un seul trou a été percé, situé au milieu de la face, soit à  $20 \text{ mm}$  des deux bords latéraux, toujours à une altitude de  $5 \text{ mm}$ . La phénoménologie sur la face Nord change principalement en fonction de l'altitude, mais peu en fonction de la position latérale des trous sur la paroi. Ainsi, en face Nord, nous caractériserons l'intensité de



l'écoulement en fonction de l'altitude avec une unique position du trou centré au milieu de la face Nord.

On peut considérer que pour une expérience donnée (taille de boîte,  $f$ ,  $\Gamma$ , choix du trou fixé...), c'est principalement la hauteur de sable au-dessus du trou  $h_t$  qui joue sur le débit de grain. Ainsi, faire varier les hauteurs de sable revient à considérer des trous situés à différentes altitudes  $z = h_{sable} - h_t$  en considérant une hauteur de sable  $h_{sable}$  fixe de 60 mm. Ce point de vue revient aussi à négliger l'influence des frottements des grains sur le fond de la boîte.

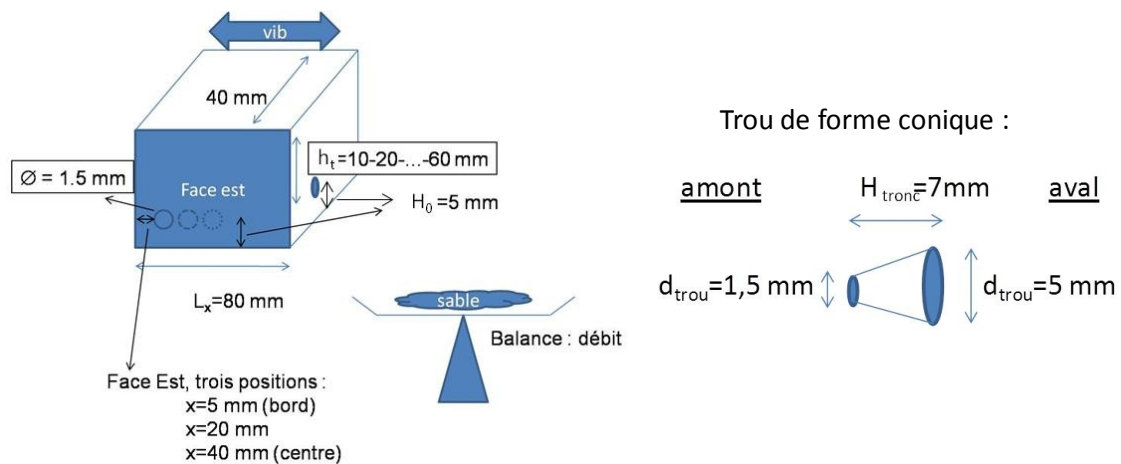


Figure 123. Représentation schématique de la boîte utilisée pour caractériser les écoulements de grains en surface. Trois trous de 1,5 mm positionnés sur la face Est et un trou situé sur la face Nord au centre de la boîte à 5 mm du fond de la boîte. Remarquons que les trous sont de forme conique afin d'éviter les phénomènes de blocage lors de l'écoulement de grains

### VI.B.2.a Influence de l'accélération

Tout d'abord, nous pouvons remarquer que le débit augmente en face Est et Nord de manière importante avec l'accélération  $\Gamma$  : le débit passe d'environ  $2,5 \text{ mg.s}^{-1}$  pour  $\Gamma=1$  à  $40,0 \text{ mg.s}^{-1}$  pour  $\Gamma=5$  (Figure 124 et Figure 125). La cartographie des débits face Est (Figure 124) est une synthèse de résultats concernant l'effet de la hauteur de sable et des trois trous de la face Est. Celle-ci a été effectuée à l'aide d'une interpolation bilinéaire des débits calculés pour toutes les gammes d'accélération  $\Gamma$  entre 0,5 et 5.

Pour plus de clarté, nous allons distinguer les évolutions des débits en fonction de l'accélération  $\Gamma$  en face Est de celles en face Nord, car les phénomènes rencontrés sont légèrement différents. On appellera dans cet exposé la profondeur de grain  $h_t$  la distance entre la surface des grains et le trou considéré. Rappelons que l'altitude  $z$  est différente est une variable différente de la profondeur  $p$  considéré,  $z = h_{sable} - h_t$ .

En face Est, nous constatons que les écoulements s'initient à la surface de l'empilement granulaire et au milieu de la face pour  $\Gamma = 1$ . Ensuite, à partir de  $\Gamma = 2$ , les débits les plus importants sont principalement situés au niveau des bords latéraux. Au centre de l'empilement granulaire, les débits décroissent avec la profondeur de grain jusqu'à  $\Gamma = 3$  et ensuite croissent avec la profondeur pour  $\Gamma = 5$ . Sur les côtés, les mêmes tendances sont observées avec un décalage sur  $\Gamma$ , les débits décroissent avec la profondeur  $h_t$  jusqu'à  $\Gamma = 2$ , puis croissent avec la profondeur à partir de  $\Gamma = 3$ .

L'interprétation de ces données est à mettre en parallèle avec les résultats présentés VI.A.2.a sur l'influence de l'accélération sur la densité et la vitesse des grains. Nous retrouvons des corrélations entre la densité et la vitesse des grains à une position donnée et le débit de grains. De plus, la contrainte locale du milieu granulaire au niveau de l'orifice (lié à la hauteur  $h_t$ ) et son orientation a aussi une influence sur le débit.

On explique que les débits sont globalement plus importants sur les bords latéraux par le fait que le milieu granulaire percute directement les parois Nord et Sud à ce niveau. Ce phénomène inertiel crée une surpression qui pousse les grains à sortir par l'orifice crée. On explique la première croissance des débits avec la profondeur par le fait que pour des faibles valeurs d'accélération, les couches granulaires restent bloquées au fond de l'empilement : rien ne bouge, aucun écoulement n'est possible et donc aucun débit n'est constaté. Pour des fortes valeurs d'accélération, les couches inférieures deviennent mobiles et les couches supérieures fluidisées. Cette fluidisation tendrait à diminuer la densité et par voie de conséquence le débit des grains malgré une plus forte mobilité des grains.

Concernant la face Nord, on retrouve une phénoménologie similaire. Les débits croissent avec la profondeur jusqu'à  $\Gamma = 3$ . Pour  $\Gamma = 5$ , on retrouve une diminution du débit de grains sur les couches de surface (Figure 126). Cette diminution du débit est aussi attribuée à la fluidisation des couches de surface.

Les zones où une vitesse importante des grains est constatée correspondent globalement aux zones où l'écoulement est le plus important quand un orifice est introduit. Les zones fluidisées de faible densité induisent aussi un débit d'écoulement plus faible lorsqu'on introduit un orifice permettant l'écoulement. Il y a aussi des zones où ces deux phénomènes sont en compétition et l'influence sur le débit reste alors intermédiaire.

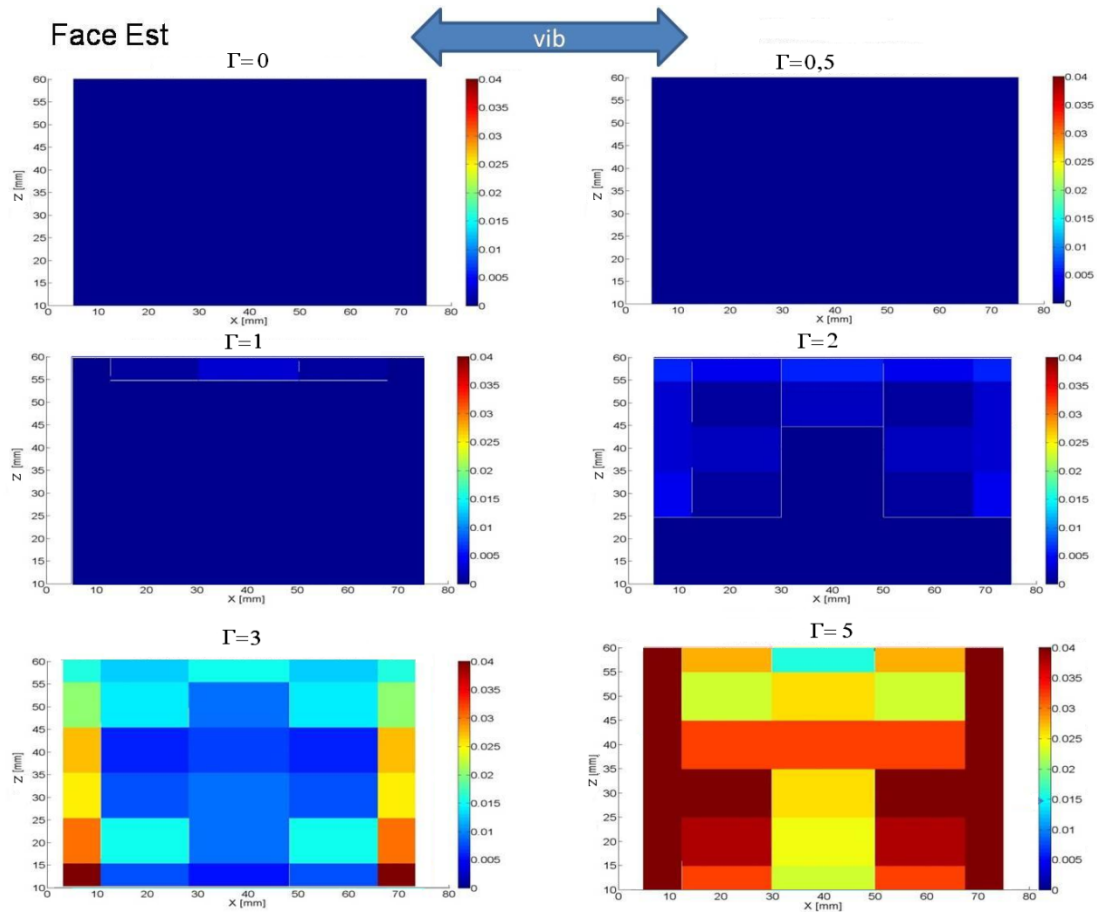


Figure 124. Influence de l'accélération sur les débits en fonction de la position du trou sur la face Est pour des diamètres de trou de 1.5 mm et une fréquence  $f=50$  Hz. Erreur de mesure :  $\pm 20\%$ . Échelles de débit en  $g s^{-1}$

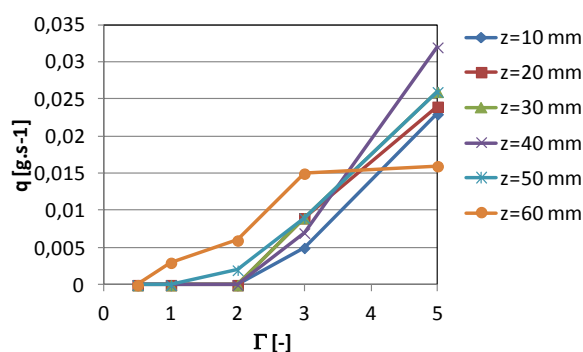


Figure 125. Influence de l'accélération sur le débit pour différentes altitudes

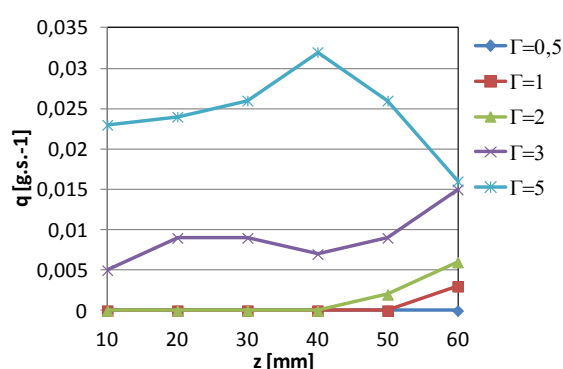


Figure 126. Influence de l'altitude sur les débits au centre de la face Nord en fonction de l'accélération pour une fréquence  $f=50$  Hz

## VI.B.2.b Influence de la fréquence

Tout d'abord, nous pouvons remarquer que le débit diminue globalement lorsqu'on augmente la fréquence en face Est et Nord (Figure 127 et Figure 128). La cartographie des débits en face Est (Figure 127) est une synthèse de résultats concernant l'effet de la hauteur de sable et des trois trous de la face Est. Celle-ci a été effectuée à l'aide d'une interpolation bilinéaire des résultats pour toutes les gammes de fréquence  $f$ .

Pour plus de clarté, nous allons distinguer les évolutions des débits avec la fréquence en face Est et en face Nord car la phénoménologie y est différente.

En face Est, pour les faibles fréquences ( $f=20$  Hz), les débits restent toujours plus importants sur les côtés qu'au milieu de la face. Sur toute la face Est, le débit a tendance à décroître quand la profondeur augmente, c'est-à-dire à croître avec l'altitude  $z$  considéré.

Pour des plus fortes fréquences ( $f=100\text{ Hz}$  et  $f=200\text{ Hz}$ ), les débits croissent quand la profondeur  $h_i$  du trou augmente. Pour  $f=50\text{ Hz}$ , la situation est intermédiaire, les débits croissent avec la profondeur sur les bords latéraux et décroissent quand la profondeur augmente au cœur de l'empilement granulaire.

Concernant la face Nord, on retrouve un phénomène similaire (Figure 128, Figure 129). Les débits décroissent quand la profondeur augmente pour  $f=20\text{ Hz}$  et  $f=50\text{ Hz}$ , croissent avec la profondeur pour  $f=200\text{ Hz}$ . Une situation intermédiaire est observée pour  $f=100\text{ Hz}$ .

L'interprétation de ces données sur l'influence des fréquences sur le débit est délicate et difficile à mettre en parallèle avec les résultats présentés en section VI.A.2.c .

L'interprétation de l'influence de la fréquence sur les débits en face Est, ne peut être avancée en détail, dans l'état actuel de nos essais limités en nombre et en type de variables testées.

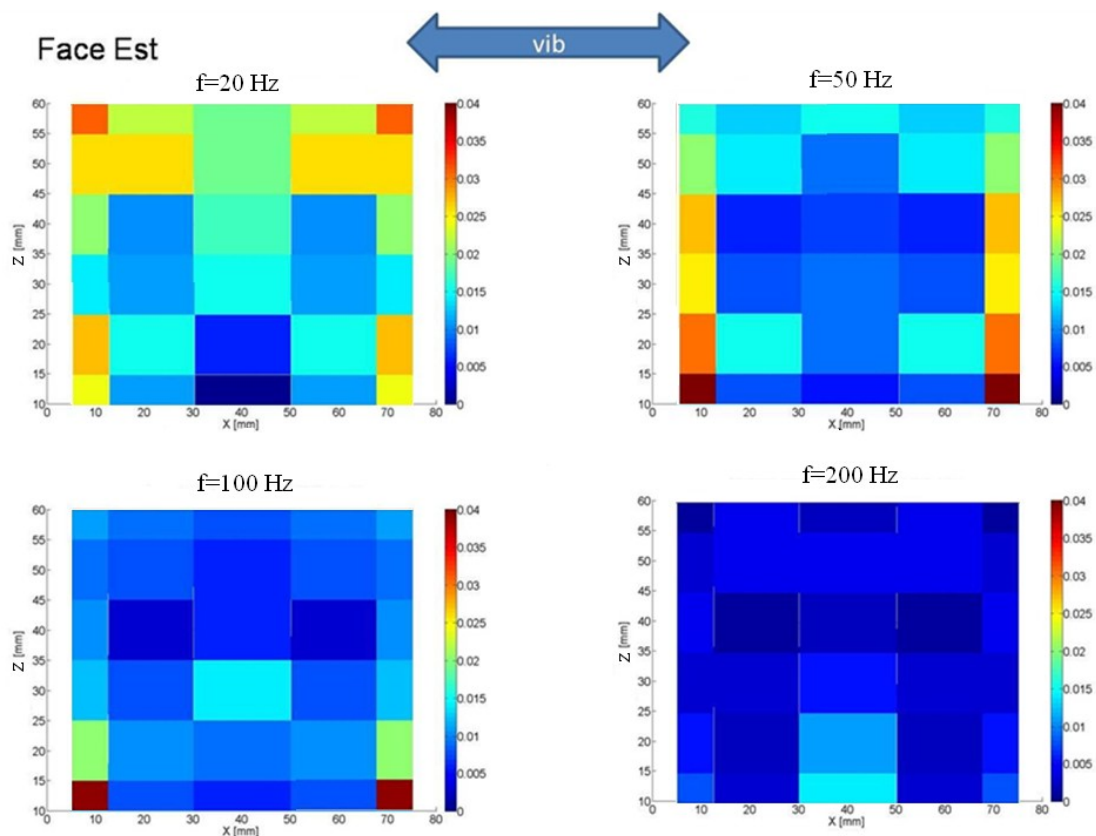


Figure 127. Influence de la fréquence sur les débits en fonction de la position du trou sur la face Est pour des diamètres de trou de 1,5 mm et pour une accélération adimensionnée  $\Gamma=3$ . Incertitude de mesure :  $\pm 20\%$

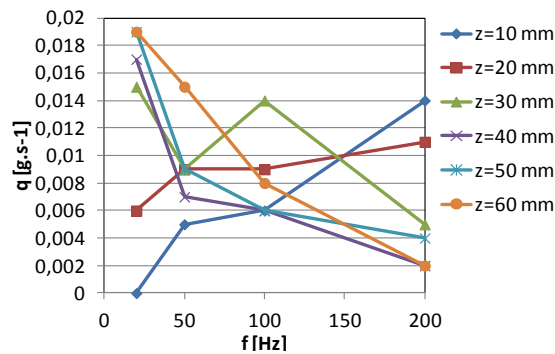


Figure 128. Influence de la fréquence sur le débit pour différentes altitudes en face Est

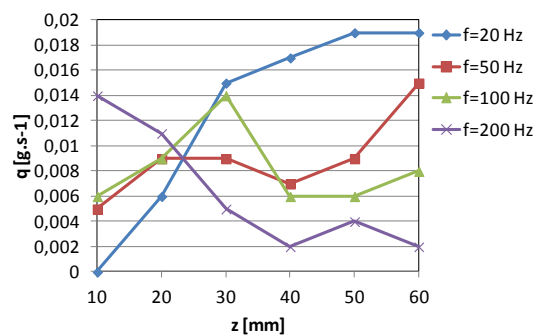


Figure 129. Influence de l'altitude sur les débits au centre de la face Nord en fonction de la fréquence pour une accélération adimensionnée  $\Gamma=3$

- ◆ A retenir sur les écoulements de grains :
  - Aucun écoulement de grains n'est constaté pour des diamètres d'orifice inférieurs à 1 mm. Pour des diamètres supérieurs à 3 mm, le débit semble proportionnel à la surface d'écoulement.
  - Le débit granulaire augmente très fortement avec l'accélération. On trouve un rapport de 1 à 20 sur les débits entre  $\Gamma=1$  et  $\Gamma=5$ .
  - Le débit d'écoulement des grains diminue globalement avec la fréquence. On trouve un rapport de 1 à 10 entre  $f=200$  et  $f=20 \text{ Hz}$ . Cette assertion n'est pas vraie dans le cas des zones profondes de l'empilement où on observe un débit plus important à forte fréquence.

# Conclusion du Chapitre VI

## Phénoménologie :

- On constate l'apparition d'un espace vide de faible densité près des parois Nord/Sud. Celui-ci est l'une des causes à l'apparition des rouleaux de convection (sim<sup>3</sup> + exp<sup>4</sup> (bibliographie)).
- Un régime stationnaire met environ 6 secondes à s'installer (sim). Cette valeur est cohérente avec celle donnée par de précédentes expériences (bibliographie). En régime stationnaire, on constate l'équilibre des flux de grains dans le milieu granulaire. Ceci signifie qu'il n'y a plus d'évolution locale ou globale de densité en régime stationnaire.
- La vitesse des grains augmente avec l'accélération (sim+exp), la taille de la boîte (sim+exp), le coefficient de friction (sim) entre grains  $\mu_{g/g}$  ou grain/paroi  $\mu_{g/m}$ . Cette vitesse diminue avec la fréquence (sim).
- On retrouve des évolutions de densité similaires quand on augmente l'accélération, la taille de la boîte, ou que l'on diminue la fréquence. On note qu'une mise en mouvement des couches du fond permet de gagner en compacité, mais une fluidisation des couches de surface peut conduire à une perte de compacité.
- Pour  $\mu_{g/g}$  proche de 0, on note une inversion des rouleaux de convection (sim). La densité moyenne augmente quand  $\mu_{g/g}$  diminue (sim).
- En simulation et en expérience, aucune ségrégation significative n'est constatée.
- Une bonne corrélation est donnée entre résultats de simulation DEM et expérience.

---

<sup>3</sup> sim : résultat de simulation

<sup>4</sup> exp : résultat expérimental

**Contraintes : (sim)**

- On note une zone de faible cisaillement à l'altitude où les vitesses des grains s'annulent et une zone de glissement total à l'altitude où les vitesses instantanées horizontales passent d'une orientation Nord/Sud à une orientation Sud/Nord.
- L'utilisation de la représentation des contraintes sous forme de cercle de Mohr est cohérente avec la phénoménologie rencontrée en régime dynamique.

**Ecoulements : (exp)**

- Pour un diamètre d'orifice inférieur à deux fois le diamètre moyen des grains, aucun écoulement n'est constaté. Pour des diamètres d'orifice supérieurs à six fois le diamètre moyen, le débit d'écoulement est proportionnel à la surface d'écoulement (soit au carré de la taille de l'orifice).
- Le débit moyen augmente avec l'accélération adimensionnée  $\Gamma$ . Il est multiplié par 20 quand  $\Gamma$  passe de 1 à 5.
- Le débit moyen diminue avec la fréquence  $f$ . Il est divisé par 10 environ quand  $f$  passe de 20 à 200 *Hz*. Une exception est faite pour les couches profondes de l'empilement granulaire où les écoulements semblent facilités pour les fortes fréquences.
- Les zones où les grains s'écoulent facilement correspondent globalement aux zones où les vitesses sont les plus grandes.



## Chapitre VII Vibrations horizontales pour un système fermé

Nous cherchons dans ce chapitre à caractériser l'influence d'un toit qui recouvre la boîte vibrée. Cette étape nous permet de nous approcher du système de remplissage industriel utilisé par le groupe Mersen où un toit est présent lors du remplissage par du sable de la coque en céramique des fusibles. Nous passons ici d'un système granulaire agité en milieu semi-ouvert (récipient ouvert sur le dessus), à un système fermé par un toit (ou couvercle) à volume constant. Nous verrons que la phénoménologie constatée présente des particularités par rapport au cas précédent.

L'objectif scientifique de cette étude est aussi d'essayer de mesurer de manière indirecte la masse introduite dans le milieu granulaire et l'énergie qu'il dissipe (par frottements et chocs principalement). Le système présenté ci-après est à l'origine d'un brevet déposé par le groupe Mersen.

### VII.A Observations expérimentales

#### VII.A.1 Dispositif expérimental

Deux éléments importants sont ajoutés au dispositif expérimental décrit section IV.A.2 : d'une part un toit rectangulaire en plexiglas d'épaisseur 1 cm vissé sur le dessus de la boîte avec une alimentation en grains pouvant être effectuée par le moyen d'un entonnoir de diamètre 5 mm, solidaire du couvercle. D'autre part un dispositif permettant de mesurer la force délivrée au système vibré et l'accélération subie par celui-ci au cours du temps.

Le système vibré est constitué par tous les éléments entraînés par le pot vibrant situés derrière le capteur de force, et portés par les roulements à billes. Ces éléments sont le plateau (comprenant la tige de liaison au plateau) auquel on peut rajouter la boîte fermée (comprenant l'entonnoir fixé sur le dessus du couvercle) et le sable contenu dans la boîte. Afin de réaliser des mesures étalons, on sera amené à considérer le cas d'un solide massif fixé par une colle forte sur le plateau en lieu et place de la boîte et du sable.

La boîte vibrée a pour dimensions intérieures  $L_x=80\text{ mm}$ ,  $L_y=40\text{ mm}$ ,  $L_z=95\text{ mm}$  (Figure 131). Deux positions de l'entonnoir ont été testées (VII.A.2.a ), à  $5\text{ mm}$  des bords latéraux ou au milieu du couvercle.

Le capteur de force Brüel&Kjaer de type 8230-002 est disposé entre le pot vibrant et le système vibré (plaque en aluminium posée sur des roulements à billes, boîte en plexiglas et sable). L'accéléromètre Deltatron de type 4517 est directement placé sur le chariot vibré et permet de mesurer l'accélération dans le sens Nord/Sud des vibrations. Une carte d'acquisition permet de recueillir les données « accélération délivrée » et « force mesurée » avec un échantillonnage de  $5000\text{ Hz}$ . Une représentation schématique du nouveau système vibré est exposée Figure 130. Notons que le capteur de force utilisé est conçu pour fonctionner uniquement dans le cas dynamique et non dans le cas statique.

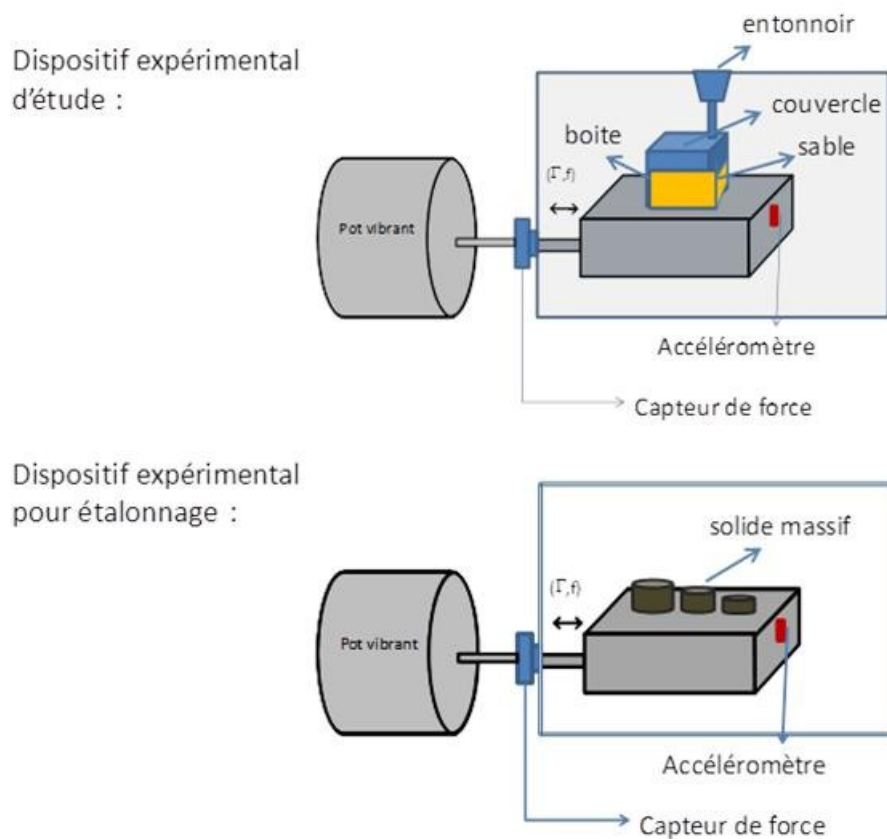


Figure 130. Dispositif expérimental classique: ajout d'un capteur de force, d'un accéléromètre, d'un toit et d'un système d'alimentation en sable. Un deuxième dispositif où des solides massifs sont collés sur le plateau est utilisé pour étalonnage des résultats

## VII.A.2 Protocole opératoire

Les vibrations débutent avant que le sable ne soit versé, et toutes les mesures de force et d'accélération sont effectuées quand le comportement du milieu granulaire devient stationnaire. Nous calculons ici un taux de remplissage de la boîte  $R_b$  qui n'est égal à la compacité du milieu granulaire que quand la boîte est entièrement pleine et qu'aucun espace vide ne subsiste. Le volume intérieur de la boîte ainsi que la densité du sable sont connus avec une excellente précision et la masse de sable embarquée  $M_{sable}$  est mesurée dans notre laboratoire à 0,01 g près.

On effectue donc le calcul de compacité du sable dans la boîte de la manière suivante :

$$R_B = \frac{M_{sable}}{\rho_g V_B} \text{ où } \begin{cases} V_B = 304000 \text{ mm}^3 \\ \rho_g = 2652,1 \text{ kg.m}^{-3} \end{cases} \quad (\text{VII-1})$$

Où  $V_B$  est le volume de la boîte et  $\rho_g$  la masse volumique des grains de sable. Pour une expérience donnée, on notera le taux de remplissage maximal de la boîte à la fin du remplissage  $R_{Bmax}$ . On estime l'erreur sur le taux  $R_{Bmax}$  à 0,05 %.

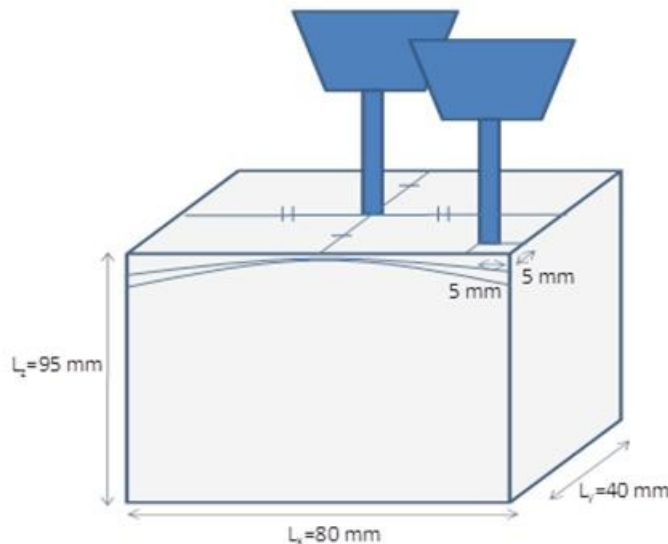


Figure 131. Schéma de la boîte parallélépipédique en plexiglas utilisée lors du remplissage avec un toit. Vue face Est. Deux configurations sont étudiées, l'une où l'entonnoir est centré, l'autre où il est situé à 5 mm des parois latérales

## VII.A.2.a Influence de la position de l'entonnoir

Nous avons effectué un essai de remplissage à  $\Gamma=3$ ,  $f=50\text{ Hz}$  avec deux méthodes de remplissage. L'une avec un remplissage par le côté de la boîte et l'autre avec un remplissage au centre de la boîte. Les résultats illustrés sur la Figure 132 montrent qu'on peut gagner 0,15 % de taux de remplissage à  $\Gamma=3$  en utilisant un mode de remplissage par le côté. En effet, à cette accélération, le trou d'arrivée des grains au centre du couvercle est rapidement en contact avec le milieu granulaire à cause de sa forme de dôme et d'effets particuliers aux angles de la boîte. Cette forme de dôme est induite par les vibrations. Un blocage des grains dans l'entonnoir se produit et il subsiste alors des espaces vides sur les côtés supérieurs de la boîte qui ont pour conséquence une diminution du taux de remplissage. Afin d'éviter ce phénomène de blocage, nous avons choisi d'utiliser un remplissage par le côté de la boîte qui permet un meilleur remplissage des parties supérieures latérales.

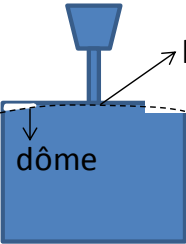
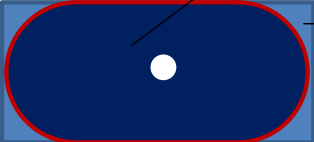
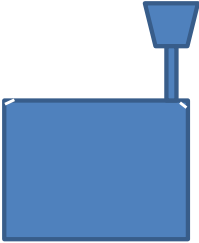

Vue face Est	Vue de dessus
	$R_{B\max}=67.50\%$ 
	$R_{B\max}=67.67\%$ 

Figure 132. Test de remplissage, par le côté du couvercle à 5 mm de chaque bord et par le centre du couvercle.  $f=50\text{ Hz}$ ,  $\Gamma=3$

### VII.A.3 Résultats

Cette partie concerne un remplissage par le côté, plus efficace pour une meilleure densification (section précédente).

#### VII.A.3.a Première phase

Tant que l'empilement granulaire n'est pas en contact avec la face supérieure du récipient, la phénoménologie est la même que celle étudiée dans le chapitre précédent. La durée de cette phase dépend de l'accélération imposée. Elle est de 14 min pour  $\Gamma=1$ , 17 min pour  $\Gamma=3$ , 32 min pour  $\Gamma=5$  à 45 min pour  $\Gamma=10$  (Figure 133).

Il nous apparaît que cette durée plus longue pour les fortes accélérations est principalement due à une forte fluidisation de la couche de surface. La pression induite par le nuage de grains de sable empêche alors les grains de s'écouler librement à la sortie de l'entonnoir. Remarquons que le contact avec le toit entraîne divers phénomènes que nous avons observés comme l'inversion des rouleaux de convection ou la diminution de l'épaisseur de la couche fluidisée. Nous avons choisi de ne pas les explorer, préférant focaliser notre étude sur l'état final du milieu granulaire et sur la caractérisation de la masse du milieu granulaire et de la dissipation d'énergie grâce à notre système combinant accéléromètre et capteur de force.

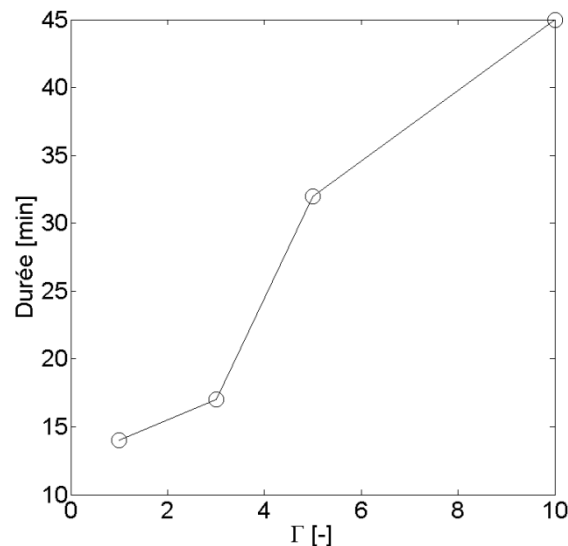


Figure 133. Temps de remplissage en fonction de l'accélération adimensionnée délivrée

### VII.A.3.b Deuxième phase

La deuxième phase du remplissage débute lorsque l'empilement granulaire entre en contact avec la face supérieure du récipient. L'existence d'un confinement réduit progressivement le débit d'alimentation jusqu'à ce qu'il s'annule.

Nous avons dans cette étude fixé la fréquence à 50 Hz, et observé le comportement du milieu granulaire aux quatre accélérations relatives  $\Gamma=1,3,5,10$ . Une petite partie du milieu granulaire reste mobile à la fin du remplissage pour  $\Gamma=1$ ,  $\Gamma=3$  et  $\Gamma=5$ . En effet, pour  $\Gamma=1, 3$  et  $5$ , l'accélération n'est pas suffisante pour projeter les grains jusque sur les côtés de la boîte vibrée : un blocage au niveau de l'orifice d'alimentation fait que des espaces vides subsistent en bord de boîte. A la fin du remplissage, aucun mouvement de grain n'est constaté à  $\Gamma=10$ , la présence d'un toit empêche tout déplacement de grain et toute fluidisation. A cette accélération, tout le volume disponible est occupé par des grains, y compris sur les bords latéraux supérieurs de la boîte. Pour cette accélération, on peut donc comparer le taux de remplissage  $R_B$  à la compacité  $C$  mesurée par le profilomètre optique. Ainsi, pour la plus forte accélération, aucun déplacement de grain n'est possible et le milieu granulaire se comporte comme un solide massif malgré les fortes sollicitations qui lui sont imposées.

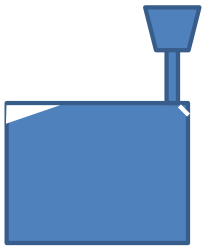
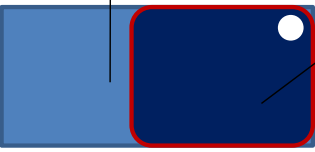
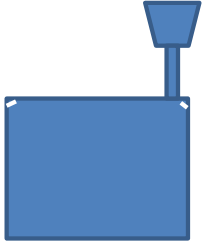

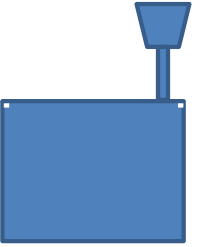

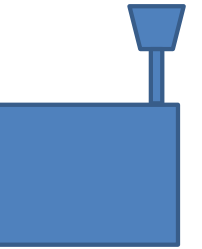

Vue face Est	Vue de dessus
 blocage	$R_{Bmax}=65.9 \%$ $\Gamma=1$  <div> Zone mobile Zone fixe </div>
	$R_{Bmax}=67.67 \%$ $\Gamma=3$  <div> Zone fixe Zone mobile fine </div>
	$R_{Bmax}=67.72 \%$ $\Gamma=5$  <div> Zone fixe Zone mobile très fine </div>
	$R_{Bmax}=67.85 \%$ $\Gamma=10$  <div> Zone fixe Zone mobile inexistante </div>

Figure 134. Aspect de l'empilement à la fin du remplissage en fonction de  $\Gamma$ ,  $f=50 \text{ Hz}$

Le taux de remplissage maximal  $R_{Bmax}$  augmente continuellement avec l'accélération  $\Gamma$  et semble rejoindre une asymptote d'équation  $R_{Bmax}=67,9 \%$  (Figure 135). Cette valeur de compacité maximale est la même que la compacité  $C$  retrouvée expérimentalement sur le même dispositif [49] à l'aide du profilomètre optique.

Au vu des résultats présentés dans les chapitres précédents, cette évolution peut surprendre. En effet, en milieu ouvert et à une très forte accélération  $\Gamma=10$ , une fluidisation du milieu granulaire induit une baisse de compacité. D'ailleurs, en milieu ouvert et à forte accélération, les grains sont même propulsés à l'extérieur de la boîte et l'expérience n'est pas exploitable. En présence d'un toit, la phénoménologie rencontrée

est tout à fait différente (Figure 134) et les valeurs de compacité pouvant être observées diffèrent totalement.

Nous estimons que ce sont surtout les espaces vides sur les bords latéraux supérieurs qui sont responsables des différences de compacité. En effet, les compacités locales restent toujours inférieures à 68 %, la compacité du RCP (Random Close Packing) du sable utilisé (aucune compacité supérieure n'a jamais été constatée expérimentalement). De plus, le taux de remplissage est très important (proche de la compacité maximale 68 %) et des espaces vides subsistent dans la boîte. Notons que la compacité  $C$  du milieu granulaire est forcément plus grande ou égale (dans le cas où tous les espaces vides sont occupés par des grains) au taux de remplissage  $R_B$ . Cette compacité  $C$  doit donc être relativement plus grande que 65,9 % à  $\Gamma=1$  car de gros espaces vides subsistent. Elle est légèrement supérieure à 67,67 et 67,72 % pour  $\Gamma=3$  et  $\Gamma=5$  car de petits espaces vides subsistent. Ainsi, la compacité du milieu granulaire est toujours proche de 68 % et les espaces vides sont responsables des variations du taux de remplissage.

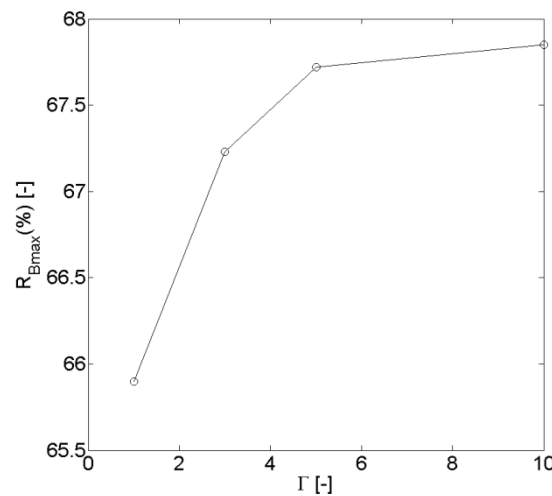


Figure 135. Evolution du taux de remplissage maximal de la boîte  $R_{Bmax}$  en fonction de l'accélération délivrée. Remplissage par le côté. Incertitude estimée:  $\pm 0,05$  %

## VII.B Vers une caractérisation indirecte du remplissage

De manière générale, et plus particulièrement pour les fortes accélérations, on constate donc que le milieu granulaire est d'abord mobile au début du remplissage puis se



fige à mesure que la boîte se remplit et que les grains de surface touchent le couvercle en plexiglas (ou toit) de la boîte. A l'aide du capteur de force et de l'accéléromètre, nous avons essayé de caractériser de manière indirecte la fin du remplissage. *Ceci présente un intérêt majeur pour qui recherche un empilement de densité très élevée.* Deux variables ont été définies et mesurées à cette fin.

La première que nous avons appelé « masse apparente »  $M_{app}$  du milieu granulaire définie comme le rapport entre deux grandeurs mesurées : la force délivrée par le pot vibrant et l'accélération mesurée.

La seconde, la puissance dissipée  $P_{diss}$ , définie comme le travail par unité de temps de la force délivrée par le pot vibrant. En effet, en régime stationnaire, la puissance dissipée est égale au travail du pot vibrant car l'énergie moyenne propre au système vibré reste constante.

Nous présenterons ci-après l'évolution expérimentale de ces deux variables. Celles-ci seront représentées en fonction de la masse totale vibrée et de l'accélération délivrée. Une série d'expériences de référence, où seul un solide massif est vibré, sert d'étalon pour l'analyse des résultats. La masse apparente et la puissance dissipée du milieu granulaire pourront donc être comparées avec la masse apparente et la puissance dissipée par un solide massif.

Enfin, avons utilisé et étudié trois modèles permettant d'interpréter les données expérimentales :

- Le modèle 1 où l'on suppose que l'énergie dissipée a pour origine un frottement coulombien ou une force de freinage visqueux qui s'oppose au mouvement.
- Le modèle 2 de type oscillateur harmonique amorti qui permet d'expliquer d'autres variations comme celle de la masse apparente moyenne.
- Le modèle 3 qui simule le milieu granulaire par un « chariot frottant » couplé à des ressorts. Nous avons imaginé ce modèle pour nous rapprocher de la réalité expérimentale : il devrait permettre d'expliquer mieux les variations expérimentales de la masse apparente instantanée.

Le nombre  $n$  de cycles de vibration considéré pour moyenner le calcul de la puissance dissipée sera  $n=100$ , soit 2 secondes de vibrations. Rappelons aussi que l'échantillonnage pour l'acquisition des accélérations et de la force est de 5000  $Hz$ . Les mesures seront donc moyennées sur 10000 points. Toutes les mesures présentées sont effectuées sous vibrations en régime stationnaire.

## VII.B.1 Méthode de mesure expérimentale directe

Dans cette partie, nous présentons d'abord les définitions de base, masse apparente instantanée et moyenne ainsi que puissance dissipée instantanée moyenne. Partant de mesures obtenues avec notre système d'acquisition Labview, les principaux résultats expérimentaux seront donnés sous la forme des variations de masse apparente moyenne et de la puissance dissipée moyenne en fonction de la masse vibrée et de l'accélération délivrée. Toutes nos mesures seront effectuées en régime stationnaire. Pour être sûr que le système soit en régime stationnaire, nous avons attendu 30 secondes avant une prise de mesure.

### VII.B.1.a Définition de la masse apparente

La masse apparente du milieu granulaire est définie comme le rapport entre la force  $f$  transmise à l'ensemble du système vibré et l'accélération mesurée. La masse apparente instantanée est donnée par :

$$M_{app}^{inst}(t) = \frac{f(t)}{a(t)} \quad (\text{VII-2})$$

On peut aussi considérer la masse apparente moyenne :

$$M_{app} = \frac{1}{nT} \int_{t^*}^{t^*+nT} \frac{f(t)}{a(t)} dt \quad (\text{VII-3})$$

Où  $n$  est le nombre de cycle sur lequel est effectué la moyenne.

L'échantillonnage étant effectué à 5000  $Hz$  pour une fréquence de 50  $Hz$  et sur une durée de 2 secondes, le calcul numérique de la masse apparente s'effectue par la sommation :

$$M_{app} = \frac{1}{10000} \sum_{i=1}^{10000} \frac{f_i}{a_i} \quad (\text{VII-4})$$

### VII.B.1.b Définition de la puissance dissipée

A l'aide de l'instrumentation expérimentale, on peut retrouver la puissance mécanique délivrée instantanée :

$$P_{méca}^{inst}(t) = f(t)\dot{x}(t) \quad (\text{VII-5})$$

Remarquons que nous avons accès à la force délivrée instantanément mais pas à la vitesse de déplacement instantanée. La vitesse instantanée se déduit par intégration de l'accélération :

$$\dot{x}(t) = \dot{x}(t^*) + \int_{t^*}^t \ddot{x}(t) dt \quad (\text{VII-6})$$

Ainsi on retrouve la puissance mécanique moyenne sur  $n$  cycles de vibrations que calcule notre programme LABVIEW en utilisant uniquement les variables accessibles force instantanée  $f$  et accélération instantanée  $\ddot{x}$  :

$$P_{méca} = \frac{1}{nT} \int_{t^*}^{t^*+nT} f(t) \left[ \dot{x}(t^*) + \int_{t^*}^t \ddot{x}(t) dt \right] dt = \frac{1}{nT} \int_{t^*}^{t^*+nT} f(t) \left[ \int_{t^*}^t \ddot{x}(t) dt \right] dt \quad (\text{VII-7})$$

L'échantillonnage étant effectué à 5000 Hz pour une fréquence de 50 Hz et sur une durée de 2 secondes, le calcul numérique de la puissance dissipée s'écrit donc de manière explicite (en utilisant (VII-7)) :

$$P_{diss} = \frac{1}{10000} \sum_{i=1}^{10000} f_i \sum_{j=1}^i (\ddot{x}_j \Delta t) \quad (\text{VII-8})$$

Où  $\Delta t = 2 \cdot 10^{-4} s$  est le pas de temps entre 2 prises de mesure.

Remarquons qu'en régime stationnaire, la puissance dissipée par le système vibré est égale à la puissance délivrée  $P_{méca} = P_{diss}$ . En moyenne, il n'y a par définition aucune variation énergétique globale du système vibré.

## VII.B.2 Résultats bruts

Afin de distinguer la différence de comportement entre un milieu contenant du sable et un milieu solide, un étalonnage de la puissance dissipée moyenne a été effectué aux trois accélérations  $\Gamma=3,5,10$ , en utilisant des masses solides fixées avec de la colle cyanoacrylique (« Super Glue ») sur le dispositif vibré.

Deux jeux de données sont donc visualisés dans le calcul de la masse apparente et de la puissance dissipée. Celui de la boîte vibrée avec des incréments progressifs de masses de sable et un jeu de données étalons où des masses solides ont été fixées sur le plateau vibré. La masse du plateau vibré  $M_{plateau}$  a été mesurée à 579 g.

Dans le cas de la mesure d'étalonnage, des solides de masse  $M_{solide\ massif}$  sont ajoutés progressivement au plateau. On a donc pour masse totale dans le cas d'un solide massif étalon :

$$M_{tot}(massif) = M_{plateau} + M_{solidemassif} \quad (VII-9)$$

La masse totale maximale obtenue est proche de 2500 g. On obtient alors une série de mesures pour une valeur  $M_{tot}$  variant entre 579 g (masse du plateau) et 2500 g.

Dans le système utilisé d'une boîte avec toit où l'on introduit du sable, la masse de la boîte vibrée  $M_{boite}$  vaut 505 g. Une masse de sable  $M_{sable}$  est ensuite introduite dans la boîte. La masse finale de sable dans la boîte est comprise entre 543 g et 548 g selon l'accélération délivrée.

La masse totale à vide du dispositif (plateau + boîte) vaut :  $M_{disp} = M_{plateau} + M_{boite} = 1084\text{ g}$ .

La masse totale avec le sable sera donnée par :

$$M_{tot}(sable) = M_{plateau} + M_{boite} + M_{sable} = M_{disp} + M_{sable} \quad (VII-10)$$

### VII.B.2.a Masse apparente

La masse apparente moyenne définie en section VII.B.1.a mesurée expérimentalement est représentée sur les graphiques Figure 136, Figure 137 et Figure 138 en fonction de la masse totale  $M_{tot}$  vibrée pour les accélérations  $\Gamma=3,5,10$ . Ces mesures ont été réalisées pour un ensemble de solides étalons et pour une boîte en

plexiglas contenant du sable, vibrée à une fréquence  $f=50\text{ Hz}$  à l'aide du dispositif présenté en section VII.A.1 .

On constate que cette masse apparente moyenne reste très proche de la masse réelle en particulier pour les solides massifs étalons. Néanmoins, on constate que la masse apparente est légèrement inférieure à la masse réelle, avec un décalage à peu près constant à une accélération donnée. On observe des séries de droite de la forme

$$M_{app} = \alpha M_{tot}(massif) - \beta(\Gamma) \text{ avec } \alpha \text{ et } \beta > 0 \quad (\text{VII-11})$$

Les droites de tendance montrent que  $0,948 < \alpha < 1,01$  et  $0,251\text{ kg} < \beta < 0,0597\text{ kg}$  avec  $\beta$  diminuant de manière significative quand  $\Gamma$  augmente.

Uniquement dans le cas où  $\Gamma=10$  et pour une faible quantité de sable, la masse apparente moyenne est inférieure à celle de l'étalon solide pendant le remplissage. Nous expliquons ce phénomène par le fait qu'à cette accélération, quand peu de sable est présent dans la boîte, l'ensemble du milieu granulaire est gazéifié (les grains ont une trajectoire de vol). De manière intuitive, on peut dire que les grains ne sont plus en contact avec le système vibré et ne sont donc plus perceptibles par le capteur de force lors de la mesure de contrainte. Comme nous l'avons présenté section VII.A.3.b , à  $\Gamma=10$ , le milieu granulaire se solidifie à la fin du remplissage. Ainsi, les grains redeviennent solidaires du système vibré et sont à nouveau pris en compte dans le calcul de la masse. La courbe de masse apparente moyenne rejoint donc celle d'un solide étalon à la fin du remplissage.

Pour les faibles accélérations, la mesure de la masse apparente moyenne ne nous permet pas de déterminer la fin du remplissage. Néanmoins, à  $\Gamma=10$ , l'observation de la masse apparente moyenne et la comparaison avec celle d'un solide étalon serait une méthode indirecte de détection de la fin du remplissage.

Nous montrerons dans la suite de ce travail qu'un modèle de type oscillateur harmonique amorti forcé permet d'expliquer le fait que la masse apparente soit légèrement inférieure à la masse réellement vibrée. Nous observerons aussi l'évolution de la masse apparente instantanée au cours du temps et l'utiliserons comme critère de validité d'un modèle physique représentant l'expérience.

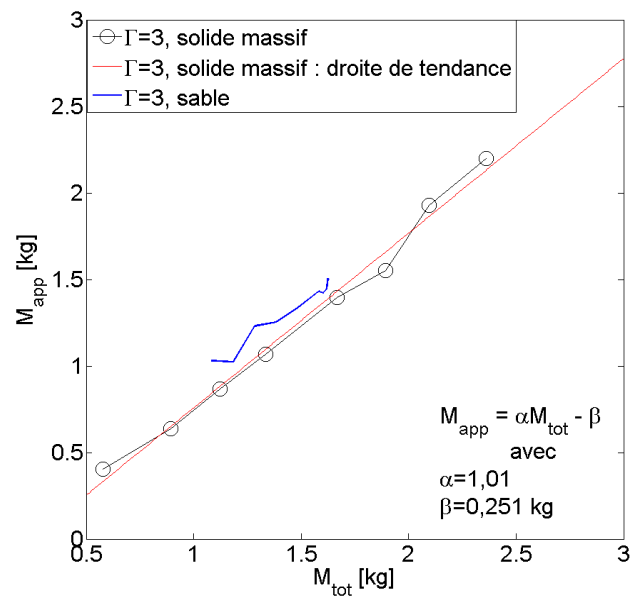


Figure 136. Masse apparente constatée à  $\Gamma=3$ . Expériences réalisées pour des solides massifs étalons et un remplissage granulaire avec un toit.  $f=50 \text{ Hz}$

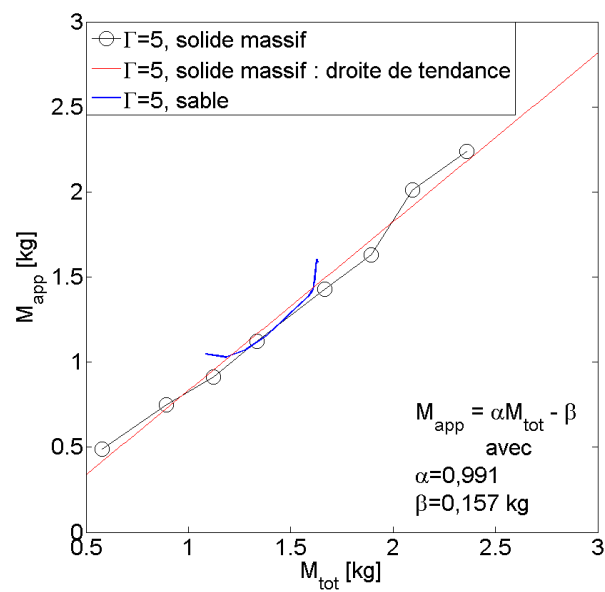


Figure 137. Masse apparente moyenne constatée à  $\Gamma=5$ . Expériences réalisées pour des solides massifs étalons et un remplissage granulaire avec un toit.  $f=50 \text{ Hz}$

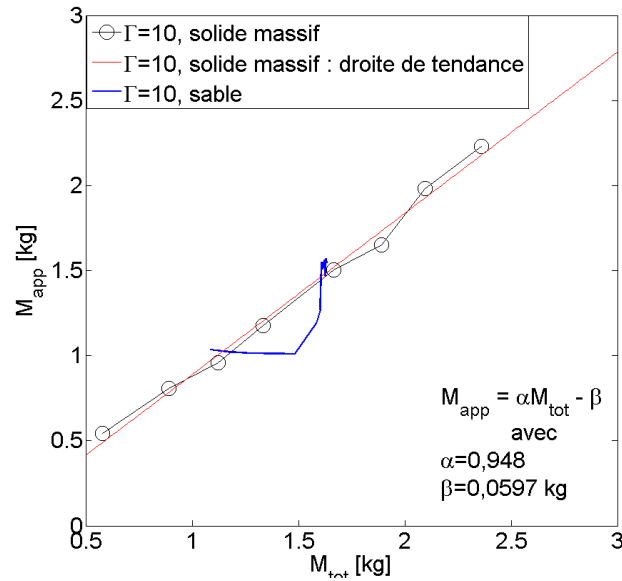


Figure 138. Masse apparente moyenne constatée à  $\Gamma=10$ . Expériences réalisées pour des solides massifs étalons et un remplissage granulaire avec un toit.  $f=50 \text{ Hz}$

### VII.B.2.b Puissance dissipée

Sur les graphiques Figure 139, Figure 140 et Figure 141, sont tracées les évolutions de la puissance dissipée moyenne en fonction de l'accélération délivrée et de la masse totale du système vibré dans le cas d'une boîte fermée contenant du sable, et dans le cas d'une mesure sur des solides massifs étalons.

Concernant l'étalonnage avec des solides massifs, nous pouvons remarquer que pour toutes les accélérations, la puissance dissipée augmente linéairement avec la masse totale en présence sur le plateau. On observe des séries de droites de la forme  $P_{diss} = aM_{tot} + b$  avec  $a$  et  $b$  croissant avec  $\Gamma$  et  $0,051 < a < 0,62$  et  $0,096 < b < 0,36$ . Le nombre restreint d'accélérations considérées dans les diverses expériences ne nous permet toutefois pas de déterminer s'il existe une loi d'évolution de la puissance dissipée avec  $\Gamma$ .

La puissance dissipée par une masse incluant du sable apparaît beaucoup plus grande que celle dissipée par un solide massif. Cette constatation comporte 2 exceptions :

- Au tout début du remplissage où la boîte vibrée est vide et où toute la masse vibrée est solide.
- A la fin du remplissage où par compaction du milieu granulaire vibré, celui-ci retrouve un comportement proche de celui d'un solide massif.

La fin du remplissage peut être clairement détectée en comparant la puissance dissipée par un système comportant du sable avec celle dissipée par un solide massif. Les deux courbes de puissance dissipée se rejoignent au début et à la fin du remplissage où le comportement du système est proche d'un solide, et où un décrochage important de la puissance dissipée est constatée quand du sable est introduit. La mobilité du milieu granulaire semble donc être un vecteur très fort de dissipation d'énergie. Cette énergie est dissipée par le frottement des grains entre eux, ou par le frottement des grains contre les parois ainsi que par les différents chocs qui peuvent avoir lieu au sein du milieu granulaire. Une caractérisation précise des origines de cette puissance dissipée devraient s'appuyer sur une modélisation par la méthode des éléments distincts. Néanmoins, les temps de remplissage excessivement longs dans le cas d'un remplissage avec un toit (environ 30 min) empêchent en pratique les simulations par DEM : nous n'avons jamais dépassé un temps de vibration de 20 secondes en simulation, ce qui avait pris près de 2 semaines de calcul.

Etant dans l'impossibilité d'utiliser la méthode DEM pour expliquer les variations de puissance dissipée et de masse apparente expérimentale, nous avons choisi d'utiliser des modèles physiques simplifiés permettant d'expliquer le comportement global du milieu granulaire. La description de ces modèles ainsi que leurs applications sont présentées dans la section suivante.



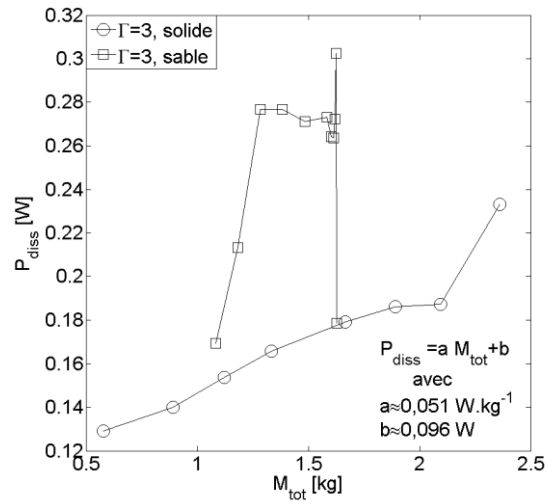


Figure 139. Puissance dissipée évaluée expérimentalement pour  $\Gamma=3$ . Expériences réalisées pour des solides massifs étalons et un remplissage granulaire avec un toit.  $f=50$  Hz

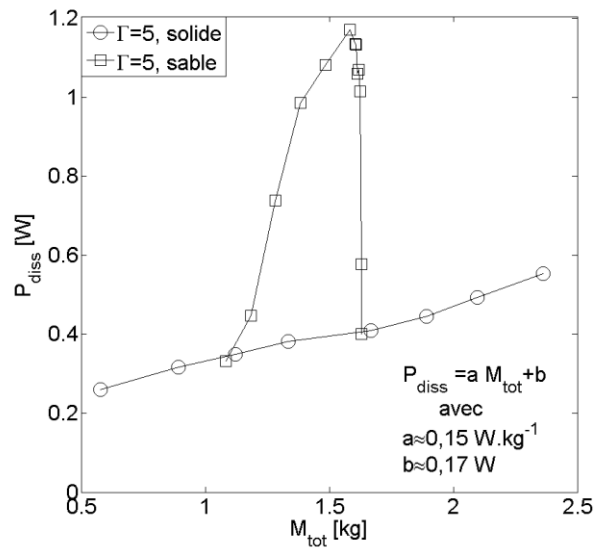


Figure 140. Puissance dissipée évaluée expérimentalement pour  $\Gamma=5$ . Expériences réalisées pour des solides massifs étalons et un remplissage granulaire avec un toit.  $f=50$  Hz

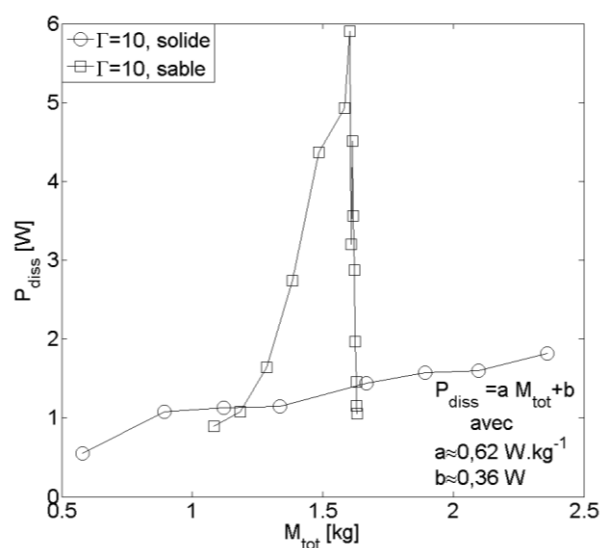


Figure 141. Puissance dissipée évaluée expérimentalement pour  $\Gamma=10$ . Expériences réalisées pour des solides massifs étalons et un remplissage granulaire avec un toit.  $f=50$  Hz

### VII.B.3 Utilisation de modèles descriptifs

Trois types de modèle ont été imaginés afin d'expliquer l'évolution de la masse apparente et de la puissance dissipée dans le milieu granulaire. Nous les présentons du plus simple au plus évolué. Ces modèles ont été développés progressivement afin de nous rapprocher au plus près des résultats expérimentaux de calcul de masse apparente et de puissance dissipée et afin d'expliquer les variations rencontrées.

Le premier modèle suppose uniquement un frottement simple durant les vibrations, de type visqueux ou coulombien. Le deuxième modèle suppose un frottement visqueux couplé à un effet d'élasticité du type « ressort linéaire ». Enfin, le dernier modèle suppose une différence de comportement entre le sable présent dans la boîte qui est représenté par un chariot frottant « cognant » et « rebondissant » sur les bords de la boîte. Le milieu granulaire est alors uniquement sujet à du frottement quand le chariot n'est pas en contact avec les parois et on ajoute un effet d'élasticité pour simuler le rebond du milieu granulaire sur les bords latéraux quand le chariot entre en contact avec les bords de la boîte. On distingue dans ce dernier modèle le frottement dû aux grains du frottement dû au reste du dispositif vibré.

### VII.B.3.a Description des modèles

Rappelons que dans tous les modèles présentés, le mouvement de la boîte est supposé parfaitement sinusoïdal :

$$x(t) = A \sin(\omega t) \quad (\text{VII-12})$$

avec  $A = \frac{\Gamma g}{\omega^2}$

#### VII.B .3.a.i Modèle 1 : « Oscillations Amorties » (OA)

Dans ce modèle, nous considérons que le système vibré est équivalent à une masse  $M_{tot}$  soumise à une force  $f_1$  générant des oscillations sinusoïdales et à une force de frottement  $f_f$ . L'introduction d'une force de frottement dans le modèle a pour objectif de rendre compte de l'énergie mécanique dissipée dans le système réel :

- au niveau du système de guidage (frottement au niveau des roulements à billes)
- dans le milieu granulaire (frottements et collisions grains-grains et grains-parois)
- dans la structure vibrée « plaque + récipient » (déformations visco-plastiques)

Deux expressions simplifiées sont considérées pour modéliser cette force de frottement. Dans la première, la force résistante est de type coulombienne. Elle est proportionnelle au poids de la masse vibrée et s'oppose au déplacement (Figure 142) :

$$f_f = -\frac{\dot{x}}{|\dot{x}|} \cdot \mu \cdot M_{tot} \cdot g \quad (\text{VII-13})$$

Dans la deuxième, le frottement est de type visqueux. La force est proportionnelle à la vitesse de déplacement du pot vibrant et orientée dans le sens inverse du déplacement (Figure 143) :

$$f_f = -c \cdot \dot{x} \quad (\text{VII-14})$$

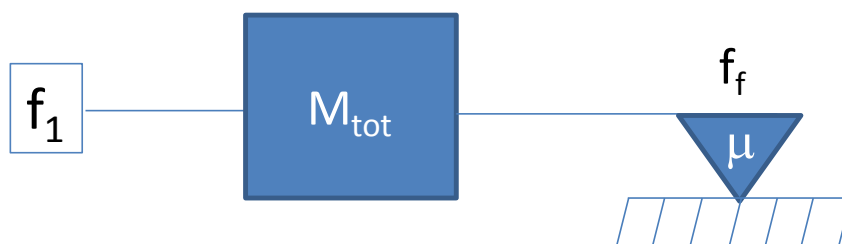


Figure 142. Modèle 1 d'oscillateur amorti par un frottement coulombien (OAC)

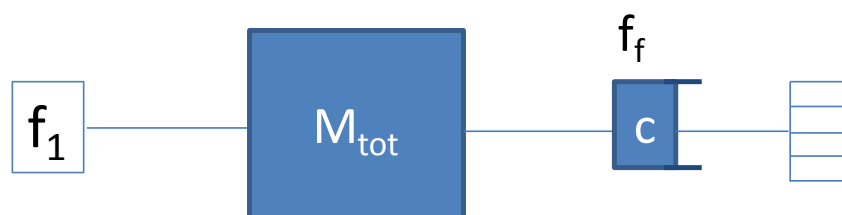


Figure 143. Modèle 1 d'oscillateur amorti par un freinage visqueux (OAV)

*Nota Bene* : dans les différents modèles présentés, les coefficients  $\mu$  et  $c$  donnent respectivement l'intensité de la force de frottement coulombien et de la force de frottement visqueux. Il faut bien comprendre qu'il s'agit simplement de « coefficients de frottement équivalents ». La réalité physique des origines de la dissipation d'énergie est beaucoup plus complexe, particulièrement dans le cas d'un milieu granulaire vibré. **Dans le cas d'un solide massif vibré**, nous pensons qu'une grande part de la dissipation d'énergie s'effectue au niveau des roulements à billes. Il faudrait alors entreprendre une étude plus poussée de la mécanique des roulements billes pour comprendre les origines précises de la dissipation d'énergie à ce niveau, ce qui nous éloignerait de notre sujet. Relevons tout de même une étude [95] qui nous pousse à penser que des frottements visqueux et coulombiens existent effectivement au sein des roulements, justifiant ainsi les modèles établis. L'intensité des frottements en présence varie en fonction de la nature et de la température de l'huile entourant les roulements, de la masse du dispositif vibré, ainsi qu'en fonction du chemin parcouru par les billes (présence éventuelle de vibrations parasites).

◆ *Première approche – modèle 1-OAC « Oscillations Amorties - Coulomb*

Ce modèle reste assez restreint mais permet d'expliquer certaines variations expérimentales comme l'augmentation de l'énergie dissipée avec la masse totale.

Dans ce modèle, la force de résistance au mouvement (opposé au sens de déplacement) est proportionnelle au poids du massif mobile,  $M_{tot}g$  :  $f_f = -\frac{\dot{x}}{|\dot{x}|} \cdot \mu \cdot M_{tot} \cdot g$ .

Le coefficient de frottement  $\mu$  intervenant dans l'expression de la force.

La relation fondamentale de la dynamique s'écrit :

$$M_{tot}\ddot{x} = f_1 - \frac{\dot{x}}{|\dot{x}|} M_{tot}g\mu \quad (VII-15)$$

où  $M_{tot}$  est la masse du système et  $\mu$  est le coefficient de frottement.

L'énergie dissipée au cours d'une période est égale au travail de la force de frottement :

$$E_{diss} = \int_0^T f_f \cdot dl = \int_0^T f_f \cdot \dot{x} \cdot dt = -M_{tot} \cdot g \cdot \mu \cdot \int_0^T \frac{\dot{x}^2}{|\dot{x}|} dt \quad (VII-16)$$

D'après l'équation du mouvement donnée plus haut, cette expression peut se développer sous la forme :

$$E_{diss} = -A\omega M_{tot} \cdot g \cdot \mu \cdot \int_0^T |\cos(\omega t)| \cdot dt = -4A \cdot g \cdot \mu \cdot M_{tot} \quad (VII-17)$$

d'où la puissance dissipée moyenne :

$$P_{diss-1OAC} = \frac{-4A M_{tot}g\mu}{T} = \frac{-4 \mu g^2 \Gamma}{T \cdot \omega^2} M_{tot} = -\mu \cdot M_{tot} \cdot \frac{g^2}{\pi^2} \cdot \frac{\Gamma}{f} \quad (VII-18)$$

Ainsi, nous voyons que la puissance dissipée est proportionnelle à la masse totale et à l'accélération, et inversement proportionnelle à la fréquence.

Ce résultat est en bon accord avec les résultats expérimentaux portés sur les Figure 139, Figure 140 et Figure 141, représentant la variation de la puissance dissipée avec la masse totale, et concernant les courbes du solide massif, proches d'une droite. Pour des valeurs de  $\Gamma$  valant respectivement 3, 5, 10, la pente  $\frac{dP_{diss}}{dM_{tot}}$  de la droite expérimentale (puissance dissipée spécifique) vaut 51, 150 et 620  $mW \cdot kg^{-1}$ . L'ordre de grandeur de la puissance dissipée spécifique calculée à partir du modèle proposé  $\frac{dP_{dissl}}{dM_{tot}}$  serait respectivement égale à 61, 105 et 205  $mW \cdot kg^{-1}$  en prenant  $\mu=0,1$  (valeur arbitraire

permettant une corrélation correcte entre l'énergie spécifique expérimentale et celle du modèle) ; et  $f=50 \text{ Hz}$  (Tableau 6).

Les variations de la puissance dissipée spécifique avec l'accélération et la masse totale vont dans le bon sens. Par contre la puissance dissipée spécifique du modèle croît moins fortement avec  $\Gamma$  que celle observée expérimentalement. On pourrait expliquer cette différence en émettant l'hypothèse d'un coefficient de friction dynamique  $\mu$  croissant avec  $\Gamma$ . Ce phénomène peut s'interpréter en considérant que des vibrations verticales parasites sont plus importantes à forte accélération. Celles-ci pourraient conduire à une rugosité apparente plus forte au niveau des roulements à billes et donc aussi à un coefficient de friction coulombien apparent  $\mu$  plus grand.

Une limite de ce modèle est donnée par les ordonnées à l'origine non nulles des droites expérimentales de puissance dissipée pour un solide massif. Cette puissance dissipée inclut donc d'autres phénomènes dissipatifs que ceux de Coulomb (donnant une puissance nulle à  $M_{tot}=0$ ). Pour cette raison, nous introduirons un deuxième modèle (1-OAV) où une dissipation par frottement visqueux est à l'origine de la dissipation d'énergie.

Accélération $\Gamma$	3	5	10
$\frac{dP_{diss}}{dM_{tot}} \text{ (exp) } [mW.kg^{-1}]$	51	150	620
$\frac{dP_{dissl}}{dM_{tot}} \text{ (mod) } [mW.kg^{-1}]$	61	105	205

Tableau 6. Puissance dissipée spécifique  $\frac{dP_{diss}}{dM_{tot}}$  expérimentale et évaluée à partir du

modèle 1-OAC  $\frac{dP_{dissl}}{dM_{tot}}$  en fixant  $\mu=0,1$ .  $f=50 \text{ Hz}$

Notons que la force que doit exercer le pot vibrant sur le système pour que ce dernier ait un mouvement sinusoïdal s'écrit de manière explicite :

$$f_1(t) = -M_{tot}A\omega^2 \sin \omega t + \frac{\dot{x}}{|\dot{x}|} M_{tot}g\mu \quad (\text{VII-19})$$

Avec ce modèle (équations (VII-12) et (VII-21)), la masse apparente moyenne définie à l'équation (VII-3) est égale à :

$$M_{appl} = \frac{1}{T} \int_0^T \frac{-M_{tot}A\omega^2 \sin(\omega t) + \text{signe}(\cos x) M_{tot}g\mu}{-A\omega^2 \sin(\omega t)} dt = M_{tot} \quad (\text{VII-20})$$

( Le deuxième membre de l'intégrale est nul par raison de symétrie.)

♦ *Deuxième approche – modèle I-OAV « Oscillations Amorties avec Viscosité »*

Dans ce modèle, on suppose qu'un frottement visqueux est à l'origine des dissipations d'énergie constatées (Figure 143). La relation fondamentale de la dynamique s'écrit :

$$M_{tot}\ddot{x} = f_1 - c\dot{x} \quad (\text{VII-21})$$

$M_{tot}$  est la masse du système considéré,  $c$  le coefficient de dissipation visqueuse,  $f_1$  est la force exercée par le pot vibrant sur le système.

L'énergie dissipée au cours d'une période est égale au travail de la force de dissipation visqueuse :

$$E_{diss} = \int_0^T f_f . dl = \int_0^T f_f . \dot{x} . dt = -c \int_0^T \dot{x}^2 . dt \quad (\text{VII-22})$$

D'après l'équation du mouvement donnée plus haut, cette expression peut se développer sous la forme :

$$E_{diss} = -c \int_0^T [A\omega \sin(\omega t)]^2 . dt = -c.A^2.\omega^2 \int_0^T [\sin(\omega t)]^2 . dt = \frac{-c.g^2.\Gamma^2.T}{2\omega^2} \quad (\text{VII-23})$$

d'où la puissance dissipée moyenne :

$$P_{diss,1} = \frac{E_{diss}}{T} = \frac{-c \cdot g^2 \cdot \Gamma^2}{2\omega^2} = -c \cdot \frac{g^2}{8 \cdot \pi^2} \cdot \frac{\Gamma^2}{f^2} \quad (\text{VII-24})$$

Ce modèle implique que la puissance dissipée par le système vibré est proportionnelle au carré de l'accélération adimensionnée et inversement proportionnelle à la fréquence.

Pour un solide massif, ce résultat permet d'expliquer l'ordonnée à l'origine non nulle  $P_{diss}(0)$  de la courbe de variation de la droite de tendance correspondant à la variation de la puissance dissipée avec la masse totale (Figure 139, Figure 140 et Figure 141).

Pour des valeurs de  $\Gamma$  valant respectivement 3, 5, 10, l'ordonnée à l'origine  $P_{diss}(0)$  de la droite expérimentale (puissance dissipée indépendamment de la masse vibrée) vaut 96, 170 et 360  $mW$ . L'ordre de grandeur de la puissance dissipée  $P_{diss1}(0)$  pour une masse nulle dans le modèle 1 OAV serait respectivement égale à 88, 244 et 976  $mW$  en prenant un coefficient de dissipation visqueuse  $c=15 \text{ N.s.m}^{-1}$  (valeur arbitraire permettant une bonne corrélation entre la puissance dissipée pour une masse nulle dans le modèle et celle estimée expérimentalement) ; et  $f=50 \text{ Hz}$ .

Les variations de la puissance dissipée en l'absence de masse avec l'accélération vont dans le bon sens : on observe une croissance de la puissance dissipée avec l'accélération dans le modèle et l'expérience. Par contre, dans ce modèle, il n'y a aucune variation de la puissance dissipée avec la masse vibrée. Néanmoins, la puissance dissipée dans le modèle croît plus fortement avec  $\Gamma$  que celle observée expérimentalement. On pourrait expliquer ces différences par l'hypothèse d'un coefficient dynamique de dissipation visqueuse  $c$  décroissant quand  $\Gamma$  augmente dans l'expérience. Ce phénomène peut se comprendre par une baisse de la viscosité cinématique de l'huile entourant les roulements, induite par un échauffement à forte accélération.



Accélération $\Gamma$	3	5	10
$P_{\text{diss}}(0)$ (exp) [mW]	96	170	360
$P_{\text{dissI}}(0)$ (mod)[mW]	88	244	976

Tableau 7. Puissance dissipée pour une masse nulle  $P_{\text{diss}}(0)$ , évaluée à partir de l'expérience et à partir du modèle 1-OAV en fixant  $c = 15 \text{ N.s.m}^{-1}$ .  $f = 50 \text{ Hz}$

Notons que la force que doit exercer le pot vibrant sur le système pour que ce dernier ait un mouvement sinusoïdal s'écrit de manière explicite :

$$f_1(t) = -M_{\text{tot}} A \omega^2 \sin \omega t + c A \omega \cos \omega t \quad (\text{VII-25})$$

ou encore sous forme simplifiée :

$$f_1(t) = F_1 \sin(\omega t + \Phi_1) \quad (\text{VII-26})$$

avec

$$\begin{cases} F_1 = \frac{-M_{\text{tot}} A \omega^2}{\cos(\arctan(\frac{-c}{m_{\text{tot}} \omega}))} \\ \Phi_1 = \arctan(\frac{-c}{M_{\text{tot}} \omega}) \end{cases} \quad (\text{VII-27})$$

Avec ce modèle (équations (VII-12) et (VII-21), la masse apparente moyenne définie à l'équation (VII-3) peut se calculer. Elle est égale à :

$$M_{\text{appl}} = \frac{1}{T} \int_0^T \frac{-M_{\text{tot}} A \omega^2 \sin(\omega t) + c A \omega \cos(\omega t)}{-A \omega^2 \sin(\omega t)} dt = \frac{1}{T} \int_0^T \left( M_{\text{tot}} + \frac{c}{\omega \tan(\omega t)} \right) dt = M_{\text{tot}} \quad (\text{VII-28})$$

Nous listons dans le Tableau 8 les paramètres nécessaires à l'application du modèle 1 - OAV. Seul le coefficient de dissipation visqueuse  $c$  est à déterminer.

Paramètres fixés par l'expérience	Paramètre à déterminer
$(A, \omega)$ ou $(\Gamma, f)$ , $M_{\text{tot}}$	$c$

Tableau 8 Paramètres nécessaires pour l'application du modèle 1-OAV

◆ Conclusion sur les deux approches et ouverture

Le modèle 1- OAC représente une partie des effets des frottements liés au solide massif. Il explique en particulier la croissance de la puissance dissipée avec la masse. Il explique grossièrement les tendances de variation de l'énergie dissipée avec  $\Gamma$ . Toutefois, ce modèle n'explique pas précisément les variations de puissance dissipée avec  $\Gamma$ . Toujours pour un solide massif, ce modèle n'explique pas non plus le fait que la droite de tendance des puissances dissipées en fonction de la masse totale ne passe pas par 0.

Le modèle 1- OAV permet d'expliquer l'ordonnée à l'origine non nulle dans les courbes de puissance dissipée en fonction de la masse totale pour un solide massif. Il explique les tendances de variation de la puissance dissipée avec  $\Gamma$ . Toutefois, ce modèle n'explique pas l'ordre de grandeur de la variation de puissance dissipée avec  $\Gamma$ . Il ne permet pas non plus d'expliquer la variation linéaire de la puissance dissipée avec la masse totale vibrée. On peut néanmoins utiliser le modèle 1-OAV pour expliquer grossièrement la valeur de puissance dissipée observée par un frottement opposé à la vitesse de déplacement.

Ces deux modèles ne sont pas exclusifs et peuvent être associés dans un modèle 1-OAC&V (Figure 144). Malgré l'absence de solution analytique complète pour ce modèle, on peut en faire une exploitation approchée. La relation fondamentale de la dynamique s'écrit :

$$M_{tot}\ddot{x} = f_1 - c\dot{x} - \frac{\dot{x}}{|\dot{x}|} M_{tot}g\mu \quad (\text{VII-29})$$

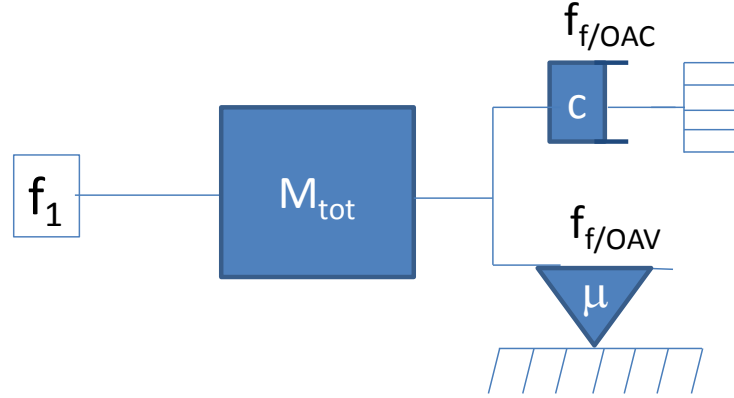


Figure 144. Représentation schématique d'un modèle combinant dissipation d'énergie visqueuse et frottement coulombien (1-OAC&V)

L'énergie dissipée au cours d'une période est égale au travail des forces de frottement :

$$E_{diss} = \int_0^T f_f \cdot dl = \int_0^T f_f \cdot \dot{x} \cdot dt = -M_{tot} \cdot g \cdot \mu \cdot \int_0^T \frac{\dot{x}^2}{|\dot{x}|} \cdot dt - c \cdot \int_0^T \dot{x}^2 \cdot dt \quad (\text{VII-30})$$

D'après l'équation du mouvement donnée (VII-12), cette équation peut se développer sous la forme :

$$E_{diss} = -A\omega M_{tot} \cdot g \cdot \mu \cdot \int_0^T |\cos(\omega t)| \cdot dt - c \cdot \int_0^T [A\omega \cdot \sin(\omega t)]^2 \cdot dt = -4A \cdot g \cdot \mu \cdot M_{tot} - \frac{c \cdot g^2 \cdot \Gamma^2 \cdot T}{2\omega^2} \quad (\text{VII-31})$$

D'où la puissance dissipée moyenne :

$$P_{diss-1OAC\&V} = \frac{-4A M_{tot} g \mu}{T} = \frac{-4 \mu g^2 \Gamma}{T \cdot \omega^2} M_{tot} = -\mu \cdot M_{tot} \cdot \frac{g^2}{\pi^2} \cdot \frac{\Gamma}{f} - c \cdot \frac{g^2}{8 \cdot \pi^2} \cdot \frac{\Gamma^2}{f^2} \quad (\text{VII-32})$$

Pour chaque valeur de  $\Gamma$ , on peut identifier la puissance dissipée dans ce modèle à celle donnée par la droite de tendance expérimentale :

$$P_{diss}(0) = c \cdot \frac{g^2}{8 \cdot \pi^2} \cdot \frac{\Gamma^2}{f^2} \text{ et } \frac{dP_{diss}}{dM_{tot}} = \mu \frac{g^2}{\pi^2} \cdot \frac{\Gamma}{f} \quad (\text{VII-33})$$

On trouve ainsi :

$$\mu = \frac{\frac{dP_{diss}}{dM_{tot}}}{\frac{\Gamma}{g^2}} \cdot \frac{\pi^2 f}{g^2} \quad (\text{VII-34})$$

et

$$c = \frac{P_{diss}(0)}{\Gamma^2} \cdot \frac{8\pi^2 f^2}{g^2} \quad (\text{VII-35})$$

En prenant  $f=50 \text{ Hz}$ ,  $g=9,81 \text{ m.s}^{-2}$  on retrouve toutes les combinaisons  $(\mu, c)$  (Tableau 9 ), permettant de représenter les évolutions de puissances dissipées pour un solide massif à partir du modèle hybride.

Accélération $\Gamma$	3	5	10
$\frac{dP_{diss}}{dM_{tot}} [\text{mW.kg}^{-1}]$ (expérience)	51	150	620
$P_{diss}(0)[\text{mW}]$ (expérience)	96	170	360
$\mu [-]$ (modèle)	0,087	0,153	0,332
$c[\text{N.m.s}^{-1}]$ (modèle)	21,9	12,3	12,7

Tableau 9. Combinaisons  $(\mu, c)$  permettant d'expliquer les variations de puissance dissipée pour un solide massif en utilisant un modèle 1-OAC&V

Remarquons que les équations précédentes permettent de montrer facilement que la masse apparente moyenne du modèle 1-OAC&V est aussi égale à la masse totale. En fait, aucun de ces modèles n'explique la différence constatée entre la masse apparente moyenne et la masse totale. Pour cette raison, nous avons introduit le modèle qui suit où l'on représente le système vibré par un oscillateur harmonique amorti forcé. Nous verrons que dans ce nouveau modèle, tout comme dans l'expérience, la masse apparente moyenne reste inférieure à la masse réellement vibrée.

#### VII.B .3.a.ii Modèle 2 : « Oscillateur Harmonique Amorti » (OHA)

Ce modèle prend en compte les effets d'élasticité du dispositif vibré en introduisant un ressort supplémentaire de rigidité  $k$  dans le schéma équivalent du modèle 1-OAV. Nous

considérons ici que le dispositif vibré est soumis à des oscillations sinusoïdales forcées (VII-12), à une force de frottement visqueuse proportionnelle à la vitesse de déplacement du pot vibrant et orientée dans le sens inverse du déplacement et à une répulsion de type ressort linéaire ( Figure 145).

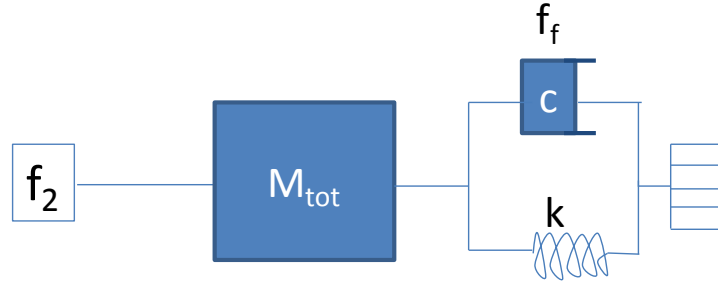


Figure 145. Représentation schématique du modèle 2 d'oscillateur harmonique amorti (OHA)

La relation fondamentale de la dynamique s'écrit :

$$M_{tot} \ddot{x} = f_2 - c\dot{x} - kx \quad (\text{VII-36})$$

où  $M_{tot}$  est la masse soumise à des vibrations,  $c$  le coefficient de frottement et  $f_2$  la force théoriquement imposé par le capteur de force dans ce modèle.  $f_2$  se décompose en trois termes :

$$f_2 = M_{tot} \ddot{x} + c\dot{x} + kx \quad (\text{VII-37})$$

L'énergie dissipée au cours d'un cycle est égale au travail de la force de frottement. Elle est identique à celle trouvée avec le modèle 1-OAV :

$$E_{diss,2} = \frac{-c \cdot g^2 \cdot \Gamma^2 \cdot T}{2\omega^2} \quad (\text{VII-38})$$

Il en est de même pour la puissance dissipée moyenne :

$$P_{diss,2} = -c \cdot \frac{g^2}{8 \cdot \pi^2} \cdot \frac{\Gamma^2}{f^2} \quad (\text{VII-39})$$

La puissance dissipée est la même dans ce modèle que dans le modèle de frottement simple introduit précédemment car l'introduction d'un ressort élastique n'introduit aucune dissipation d'énergie supplémentaire.

Notons que la force mesurée par le capteur de force s'écrit de manière explicite :

$$f_2 = -M_{tot}A\omega^2 \sin \omega t + cA\omega \cos \omega t + kA \sin \omega t \quad (\text{VII-40})$$

Ou encore sous forme simplifiée :

$$f_2(t) = F_2 \sin(\omega t + \Phi_2) \quad (\text{VII-41})$$

Avec  $F_2$  l'amplitude maximale de la force véhiculée au niveau du capteur de force et  $\Phi_2$  le déphasage de la force par rapport à l'accélération.

On trouve :

$$\begin{cases} F_2 = A \cdot k \sqrt{(1 - r^2)^2 + (2\xi r)^2} \\ \Phi_2 = \arctan\left(\frac{2\xi r}{r^2 - 1}\right) \end{cases} \quad (\text{VII-42})$$

Avec

$$\begin{cases} r = \omega \sqrt{\frac{M_{tot}}{k}} \\ \xi = \frac{c}{2\sqrt{kM_{tot}}} \end{cases} \quad (\text{VII-43})$$

La masse apparente instantanée est égale à :

$$M_{app2}(t) = \frac{F_2 \sin(\omega t + \phi)}{-A\omega^2 \sin(\omega t)} \quad (\text{VII-44})$$

La masse apparente moyenne dans la représentation par le modèle 2 est égale à :

$$M_{app2} = \frac{1}{T} \int_0^T \frac{f_2}{\ddot{x}} dt \quad (\text{VII-45})$$

En utilisant les équations (VII-40) et

(VII-45), on trouve :

$$M_{app2} = \frac{1}{T} \int_0^T \frac{-M_{tot}A\omega^2 \sin(\omega t) + cA\omega \cos(\omega t) + kA \sin(\omega t)}{-A\omega^2 \sin(\omega t)} dt = \frac{1}{T} \int_0^T M_{tot} - \frac{k}{\omega^2} + \frac{c}{\omega \tan(\omega t)} dt \quad (\text{VII-46})$$

Le deuxième membre est périodique de période  $T/2$ , symétrique sur une sous-période  $T/4$ , et son intégrale s'annule. Il reste donc simplement :

$$M_{app2} = M_{tot} - \frac{k}{\omega^2} \quad (\text{VII-47})$$

Ce modèle permet d'expliquer partiellement le fait que la masse apparente mesurée expérimentalement est inférieure à la masse réelle du système. Néanmoins, nous verrons que le modèle n'est pas tout à fait représentatif des phénomènes rencontrés dans la réalité car (entre autres) l'évolution de la masse apparente instantanée représentée diffère sensiblement de celle constatée expérimentalement.

Remarquons qu'il y a une indétermination lorsqu'on utilise le modèle 2 dans la détermination de la masse effectivement vibrée  $M_{tot}$  et de la raideur du ressort  $k$ . En effet :

$$f_2 = (-M_{tot}A\omega^2 + kA)\sin \omega t + cA\omega \cos \omega t$$

On peut donc théoriquement choisir une infinité de valeurs du couple ( $k$ ,  $M_{tot}$ ) pour obtenir une même mesure de force. En pratique, on fixera  $M_{tot}$  égale à la masse réellement vibrée que l'on connaît (on pourrait prendre une valeur de  $M_{tot}$  inférieure à la masse réelle en considérant que dans le cas d'un système comprenant un milieu granulaire, toute la masse de grain n'est pas forcément soumise aux vibrations).

Nous listons dans le Tableau 10 les paramètres nécessaires à l'application du modèle 2. Seuls le coefficient de frottement  $c$  et le coefficient de raideur  $k$  sont à déterminer dans l'utilisation de ce modèle en distinguant ceux déterminés par l'expérience de ceux qui restent à déterminer.

*Remarque :* si l'on choisissait de prendre la rigidité du système vibré nulle, on reviendrait au modèle 1 !

Paramètres fixés par l'expérience	Paramètres à déterminer
$(A, \omega)$ ou $(\Gamma, f)$ , $M_{tot}$	$c, k$

Tableau 10. Paramètres nécessaires pour l'application du modèle 2

*NB. : Avant d'aller plus loin dans l'exposé, remarquons que par abus de langage, nous appellerons les coefficients de dissipation visqueuse « coefficients de frottement visqueux » ou parfois simplement « coefficients de frottement ». Ces coefficients de*

symbole «  $c$  » sont à distinguer des coefficients de frottement coulombien ayant pour symbole «  $\mu$  ». Pour la suite, nous avons uniquement considéré des frottements visqueux.

### VII.B .3.a.iii Modèle 3 : « chariot frottant » (CF)

Le troisième modèle est une représentation plus fine de ce qui se passe réellement dans le milieu granulaire vibré. On considère ici que le milieu granulaire est toujours soumis à des oscillations sinusoïdales forcées. Le dispositif soumis à des vibrations sinusoïdales (VII-12), sans considérer le sable, comprend le plateau et la boîte vibrés, de masse  $M_{disp}$ . Le milieu granulaire est représenté comme un chariot frottant de masse  $M_{sable}$  qui est « ballotté » à l'intérieur de la boîte vibrée. Remarquons que la masse totale vibrée  $M_{tot}$  décrite dans les deux modèles précédents est la somme de ces deux masses:  $M_{tot} = M_{disp} + M_{sable}$  (VII-10).

Le chariot rebondit sur les murs latéraux par l'intermédiaire de ressorts de longueurs  $L_r$  et de rigidité variable  $k$  (définie ci-après). Nous considérons à nouveau que le système vibré est soumis à un frottement de type visqueux, mais nous décomposons celui-ci en deux parties.

La première est le frottement du dispositif vibré sur les roulements à billes dont la force vaut :

$$f_b = -c_b \dot{x} \quad (\text{VII-48})$$

où  $c_b$  est le coefficient de frottement au niveau des roulements,  $x$ , ( $x_c$ ) : la position de la boîte (du chariot). Cette force est opposée à la vitesse de déplacement de la boîte par rapport au référentiel du laboratoire.

La seconde partie du frottement est celui entre le chariot frottant et le support de la boîte vibré. La force résistante correspondante, opposée à la vitesse relative de déplacement entre le chariot et la boîte, vaut :

$$f_c = -c_c (\dot{x}_c - \dot{x}) \quad (\text{VII-49})$$

où  $c_c$  est le coefficient de frottement entre le chariot et la boîte et  $\dot{x}_c$  est la vitesse du chariot.



Quand le ressort entre en contact avec une des parois latérales, celui-ci exerce une force de poussée opposée à la contraction  $\delta$  du ressort et de grandeur  $k\delta$  où  $k$  est la rigidité du ressort. Afin d'éviter que le chariot puisse traverser la boîte, nous pris une rigidité du ressort variable (augmentant avec la contraction du ressort) :

$$k = k_{ini} \frac{1}{1 - \frac{\delta}{L_r}} \quad (\text{VII-50})$$

Les Figure 146 et Figure 147 schématisent ce modèle.

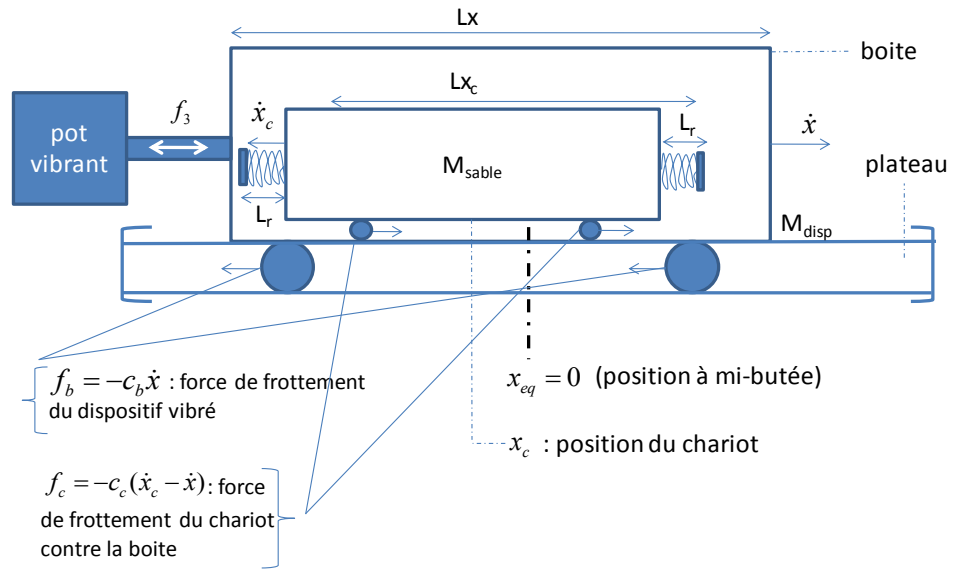


Figure 146. Représentation schématique du modèle 2, chariot frottant (CF) sans contact avec la paroi (contraction des ressorts  $\delta = 0$  sur les deux côtés).

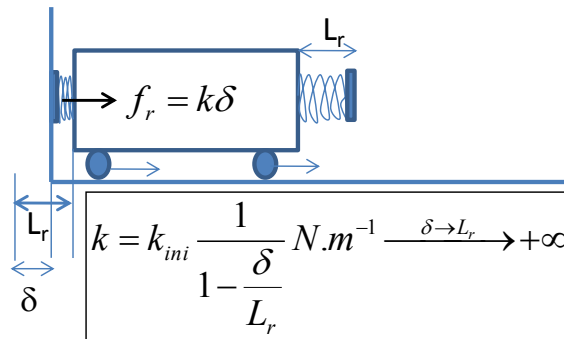


Figure 147. Représentation schématique de la force de répulsion qui s'ajoute aux forces de frottement lorsqu'il y a un contact avec la paroi

Nous pouvons maintenant écrire le bilan des forces s'exerçant sur la boîte vibrée :

$$f_3 - f_c - f_b = M_{disp} \ddot{x} \quad (\text{VII-51})$$

$f_b$  : force s'exerçant sur le dispositif « plateau/boîte » par l'intermédiaire du pot vibrant,

$f_c$  : force exercée par la boîte vibrée sur le chariot frottant,

$A$  : amplitude de vibration

$\omega$  : pulsation.

En l'absence de contact entre le ressort du chariot et la paroi, la force s'exerçant sur le chariot frottant est déterminée par l'équation :

$$f_c = -c_c (\dot{x}_c - \dot{x}) \quad (\text{VII-52})$$

En cas de contact entre le ressort du chariot et la paroi, la force s'exerçant sur le chariot frottant est déterminée par l'équation :

$$f_c = -c_c (\dot{x}_c - \dot{x}) \pm k\delta \quad (\text{VII-53})$$

où le signe de la force de répulsion est déterminé de manière à ce que le mur exerce une répulsion sur le chariot et  $k$  variable déterminée selon l'équation (VII-50).

Aucune expression analytique de  $f_3(t)$  ne peut être donnée ici. Un calcul itératif à chaque pas de temps  $dt$  basé sur les lois de Newton doit être conduit. Ces lois permettent de déterminer de manière itérative la position  $x_c$  du chariot à chaque pas de temps  $dt$ . A chaque itération de calcul, on effectue les opérations d'intégration :

$$\ddot{x}_c(t) = \frac{f_3}{M_{sable}} \rightarrow \dot{x}_c(t+dt) = \dot{x}_c(t) + \ddot{x}_c(t)dt \rightarrow x_c(t+dt) = x_c(t) + \dot{x}_c(t)dt \quad (\text{VII-54})$$

Connaissant à chaque instant  $x_c$ ,  $\dot{x}_c$  et  $\ddot{x}_c$ , on peut alors calculer  $f_3$ . Le calcul du mouvement pourra se faire simplement à partir de n'importe quelle application de calcul mathématique, nous avons choisi d'utiliser le logiciel MATLAB.

En considérant que l'on a pris la masse du dispositif et une masse de sable égale à celle de l'expérience, nous listons dans le Tableau 11 les paramètres nécessaires à l'application du modèle 3 en distinguant ceux déterminés par l'expérience de ceux qui restent à déterminer. Les valeurs de certains paramètres comme  $Lx_c$ ,  $Lr$  sont approximés

par l'expérience (non déterminés, mais on en connaît l'ordre de grandeur). On prend en effet pour  $Lx_c$  une longueur légèrement inférieure à celle de la boîte pour simuler l'espace de faible densité (« gap ») créé le long des parois Nord/Sud. On choisit pour  $L_r$  une fraction de la longueur de cet espace de faible densité. Remarquons que cet espace augmente avec l'accélération délivrée. Pour  $dt$ , on choisit une valeur assez petite pour que la solution de l'équation du mouvement du chariot n'évolue plus et assez grande pour que le calcul du mouvement s'effectue en un temps raisonnable. On considèrera aussi que la position initiale du chariot est centrée par rapport à la boîte et que la vitesse initiale du chariot est nulle.

Paramètres fixés par l'expérience	Paramètres à déterminer
$(A, \omega)$ ou $(\Gamma, f)$ , $M_{disp}$ , $M_{sable}$ , $L_x$	$c_b, c_c, k_{ini}$ + $\{Lx_c, L_r, x_c(t=0), \dot{x}_c(t=0), dt\}$ à préciser

Tableau 11. Paramètres nécessaires pour l'application du modèle 3

### VII.B.3.b Remarques sur la détermination des paramètres des modèles

Pour une expérience donnée, à paramètres  $\Gamma$  et  $f$  fixés, nous effectuons une acquisition des données forces et accélérations pour un échantillonnage de 5000 Hz et durant 2 sec. Ainsi, on obtient un ensemble de 10000 valeurs de force  $f(t_i)$  et accélérations  $\ddot{x}_{exp}$  mesurées. La phase réelle (ou l'origine des temps) dans le cycle de vibration s'obtient en minimisant la fonction  $\ddot{x} - x_{exp}$  où  $\ddot{x} = -A\omega^2 \sin(\omega t)$  est l'accélération idéale que l'on a souhaité imposer au système (il y a toujours une légère déviation entre l'accélération idéale et l'accélération effectivement délivrée au milieu granulaire). Ensuite, la méthode des moindres carrés permet de retrouver les paramètres utilisés dans le modèle (1 ou 2) afin de minimiser la fonction :

$$\Delta f = \sum_i (f(t_i) - f_j(t_i))^2 \quad (\text{VII-55})$$

Où  $j$  est l'indice du modèle considéré et  $i$  l'indice du temps considéré lors de l'acquisition des données.

Pour le modèle 3, la méthode des moindres carrés ne fonctionne pas de manière simple car aucune équation analytique ne permet de déduire le mouvement. Un test empirique nous a néanmoins permis de trouver un jeu de paramètres approximant de manière satisfaisante la masse apparente instantanée mesurée à  $\Gamma=10$ ,  $f=50$  Hz. Aussi, nous pensons que ce modèle se rapproche au mieux de la réalité.

### VII.B.3.c Etude qualitative de la variation de la masse apparente

Les valeurs de masse réelle différant de la masse apparente (VII.B.2.a ), nous pouvons dire que le modèle 1 ne permet pas une description fine des phénomènes rencontrés dans un milieu granulaire vibré. En effet, dans ce modèle, la masse apparente moyenne est égale à la masse réellement vibrée. Hors, comme le montrent les résultats de masse apparente moyenne présentés section VII.B.2.a , celle-ci diffère notablement de la masse réelle : on observe un décalage de la masse vers le bas. Ce décalage est représenté par le modèle 2 en fixant la masse vibrée égale à la masse réelle et en introduisant un coefficient de rigidité  $k$ . La valeur de  $k$  en fonction de la masse totale dans le cas d'un solide massif vibré de l'expérience où une boîte contient du sable est déterminée par optimisation des données (calcul de moindres carrés). La Figure 148 indique la variation de la valeur de  $k$  avec la masse totale en fonction de la nature du matériau vibré. La variation de la rigidité avec la masse vibrée et selon la nature du matériau vibré (solide massif ou sable) est très chaotique. Son sens physique reste à étudier et à discuter.

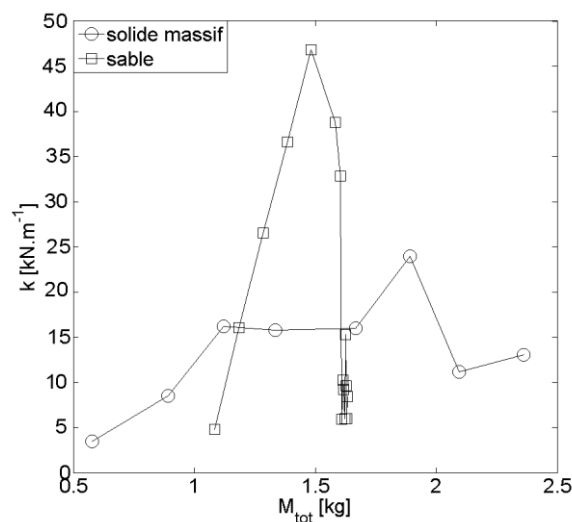


Figure 148. Evolution du coefficient de rigidité du modèle 2 (OHA) avec la masse totale pour  $f=50$  Hz,  $\Gamma=10$

Nous avons observé l'évolution expérimentale à  $\Gamma=10$ ,  $f=50$  Hz, de la masse apparente instantanée pour une masse de sable de  $M_{sable}=500$  g, et une masse du dispositif vibré  $M_{disp}=1084$  g. Celle-ci est présentée Figure 149.

Nous avons calculé la masse apparente instantanée dans les modèles 2 et 3 et l'avons comparée à celle obtenue dans l'expérience afin d'expliquer les évolutions qualitatives de la masse apparente au cours du temps.

En utilisant le modèle 2, l'évolution de la masse apparente instantanée est de la forme (VII-44). Un ajustement du modèle sur les résultats expérimentaux permet d'obtenir l'évolution de masse apparente instantanée Figure 149. Dans cette approximation, le coefficient de frottement apparent vaut  $c=106$  N.s.m<sup>-1</sup> et la rigidité  $k=21,4$  kN.m<sup>-1</sup>. L'accélération, la fréquence et la masse totale vibrée correspondent aux valeurs expérimentales. La masse apparente varie de  $-\infty$  à  $+\infty$  chaque demi-cycle de vibration et reste toujours croissante. Ce modèle explique qualitativement les variations de masse apparente constatée expérimentalement. Néanmoins, un petit pic de masse apparente, apparaissant avant la fin de chaque demi-cycle dans l'expérience, ne peut pas être expliqué par ce modèle. Nous pensons que ce pic secondaire de masse apparente constaté expérimentalement provient du « rebond » du milieu granulaire sur les bords latéraux et c'est ce qui nous a conduit à introduire le modèle 3. En effet, le modèle 3 explique toutes les variations qualitatives de la masse apparente en fonction du temps. Néanmoins, un ajustement du modèle 3 sur les résultats expérimentaux est difficile à mettre en œuvre car beaucoup de paramètres entrent en jeu et aucune formule analytique n'existe pour décrire le mouvement.

Une série de tests empiriques nous a tout de même permis de déterminer un ensemble de paramètres qui permettent une évaluation de la masse apparente instantanée expérimentale sur la masse apparente obtenue par le modèle 3. L'ensemble des paramètres déterminés par l'expérience et/ou empiriquement sont listés Tableau 12. Remarquons que le coefficient de friction du dispositif vibré est pris égal à celui d'un solide vibré de même masse, soit  $c_b = 20$  N.s.m<sup>-1</sup> pour  $M_{disp}=1,084$  kg. La longueur du chariot a été fixé à  $L_c=78$  mm, celle du ressort à  $L_r=0,5$  mm. On considère donc ici uniquement 1 mm d'espace vide (« gap ») entre le chariot représentant les grains et les bords de la boîte ce qui paraît cohérent avec les observations expérimentales. Selon la manière de définir l'espace vide, la taille du gap aurait pu prendre une valeur comprise entre 0 et 4 mm et la longueur du ressort pouvait varier dans ce même intervalle. Les

positions initiales  $x(0)$ ,  $x_c(0)$  et vitesses initiales  $\dot{x}(0)$ ,  $\dot{x}_c(0)$  sont prises égales à 0, c'est-à-dire au milieu de la boîte lorsque celle-ci se trouve à mi-distance entre les deux positions de butée. On en déduit la variation de masse apparente du modèle 3. Elle est représentée Figure 149 où le pic secondaire de masse apparente secondaire correspondant au rebond du milieu granulaire contre les murs latéraux est alors bien visualisé.

Malgré la meilleure représentativité du modèle 3, nous nous contenterons par la suite d'exposer les conclusions sur les puissances dissipées apportées par les modèles 1 et 2. En effet, une grande série de paramètres doit être déterminée empiriquement pour chaque masse vibrée et chaque accélération. Ce modèle n'est donc pas applicable pour une grande série de mesures. Néanmoins, soulignons que si une automatisation de la valeur des paramètres du modèle 3 pouvait être effectuée, cette représentation, ou une représentation dérivée, s'approcherait sans doute plus de la réalité expérimentale.

Paramètres fixés par l'expérience	Paramètres déterminés empiriquement
$\Gamma=10, f=50 \text{ Hz}, M_{disp}=1,084 \text{ kg},$ $M_{sable}=0,5 \text{ kg}, L_x=80 \text{ mm}$	$c_b=20 \text{ N.s.m}^{-1}, c_c=130 \text{ N.s.m}^{-1},$ $k_{ini}=10^5 \text{ N.m}^{-1}$ <i>Déterminés approximativement</i> <i>par l'expérience et les modèles</i> <i>DEM classiques :</i> $\{ Lx_c=78 \text{ mm}, L_r=0,5 \text{ mm},$ $x_c(t=0)=0 \text{ m.s}^{-1}, \dot{x}_c(t=0)=0 \text{ m.s}^{-1},$ $dt=10^{-7} \text{ s} \}$

Tableau 12. Paramètres déterminés par l'expérience pour modéliser la masse apparente instantanée représentée Figure 149

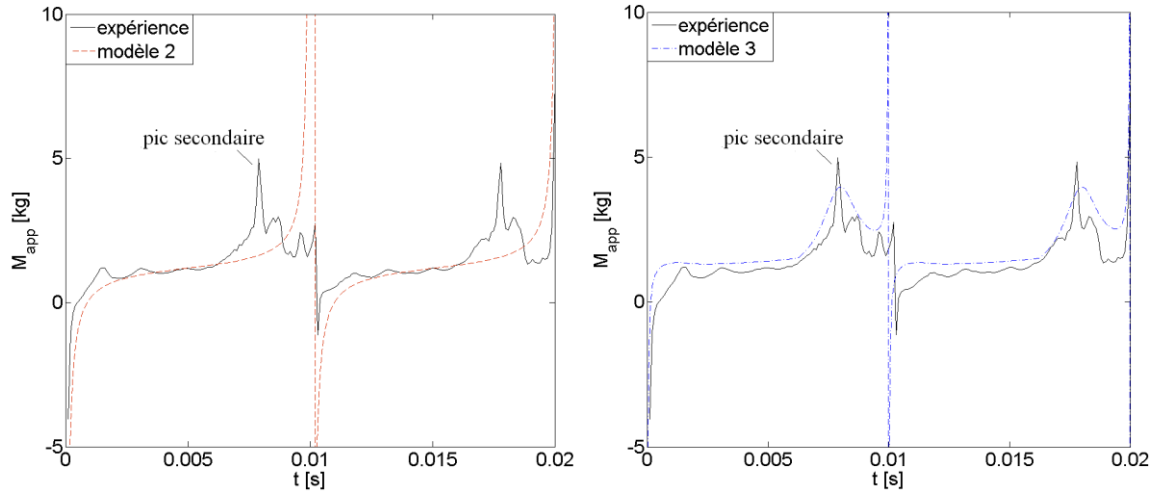


Figure 149. Masse apparente instantanée et fit en utilisant le modèle OHA (modèle 2) et le modèle CF (modèle 3)

#### VII.B.3.d Etude qualitative de la puissance dissipée

Les modèles 1-OAV et 2 (OHA) permettent de relier la puissance dissipée à un coefficient de frottement propre au milieu vibré par la relation  $P_{diss2} = P_{diss1} = \frac{cg^2\Gamma^2}{2\omega^2}$ . La valeur de  $c$  est donc dans ces modèles proportionnelle à  $\frac{g^2\Gamma^2}{2\omega^2}$ . Tous les effets dissipatifs sont alors contenus dans le coefficient de dissipation visqueuse  $c$  : il s'agit bien sûr d'une approximation très grossière des phénomènes physiques conduisant à une dissipation d'énergie. Le modèle 2 propose une variable supplémentaire, la rigidité  $k$  qui permet d'expliquer la variation de masse apparente du système. Dans la suite des résultats exposés, c'est celui-ci que nous utilisons. Par la méthode des moindres carrés, nous déduisons la valeur de  $k$  permettant de minimiser au mieux l'écart entre les forces évaluées dans l'expérience et celles proposées dans le modèle. Pour une série de différentes masses totales, cette méthode est appliquée pour recalculer la puissance dissipée en se basant sur le modèle à  $\Gamma=10, f=50$  Hz. On obtient le résultat Figure 150 où la bonne concordance entre la puissance dissipée évaluée par le modèle et par l'expérience justifie la pertinence de l'utilisation de ce modèle.

Nous avons évalué aussi, par le modèle, le coefficient de frottement  $c$  propre au dispositif contenant un milieu granulaire et au solide massif étalon en fonction de la

masse totale vibrée pour toutes les accélérations étudiées  $\Gamma=3,5,10$  (Figure 151). Toutes les valeurs de coefficient de frottement se retrouvent sur une même échelle. Ainsi, un même phénomène, la friction, explique relativement bien les variations d'énergie dissipée à toutes les accélérations étudiées. Nous remarquons que ces valeurs sont très proches pour toutes les accélérations et dépendent principalement de la masse vibrée et de la nature du matériau vibré, s'il s'agit d'un milieu granulaire mobile ou d'un milieu solide (solide massif ou milieu granulaire solidifié).

Pour un solide massif, à  $\Gamma=10$ , le coefficient de friction augmente linéairement de  $18,6 \text{ N.m.s}^{-1}$  à  $36,6 \text{ N.m.s}^{-1}$  avec la masse soumise aux vibrations. A  $\Gamma=5$ , il augmente de  $23,8 \text{ N.m.s}^{-1}$  à  $44,2 \text{ N.m.s}^{-1}$ . A  $\Gamma=3$ , il augmente de  $29,7 \text{ N.m.s}^{-1}$  à  $52,1 \text{ N.m.s}^{-1}$ .

En lissant les résultats par des droites, on obtient l'évolution du coefficient de friction pour un solide massif (Figure 151) sous la forme :

$$c = aM_{tot}(\text{massif}) + b(\Gamma) \text{ avec } a \text{ et } b > 0 \quad (\text{VII-56})$$

Avec  $9,8 \text{ N.s.m}^{-1}.\text{kg}^{-1} < a < 11,9 \text{ N.s.m}^{-1}.\text{kg}^{-1}$  et  $12,4 \text{ N.s.m}^{-1} < b < 21,2 \text{ N.s.m}^{-1}$

$a$  et  $b$  diminuent quand  $\Gamma$  augmente. Le coefficient de friction décroît donc (légèrement) quand l'accélération imposée  $\Gamma$  augmente.

Nous avons essayé de caractériser un coefficient de friction propre au milieu granulaire en supposant que sa participation dans la dissipation d'énergie était proportionnelle à la masse de grains vibrés par rapport à la masse totale.

Nous pouvons alors écrire :

$$M_{tot} c = M_{disp} c_{disp} + M_{sable} c_{sable} \quad (\text{VII-57})$$

Où  $c_{disp}$  est ici le coefficient de friction propre au dispositif solide massif vibré de masse  $M_{disp}$  (plateau+boite) et  $c_{sable}$  le coefficient de friction propre au sable de masse  $M_{sable}$ .

D'où la valeur du coefficient de friction propre au sable :

$$c_{sable} = \frac{M_{tot} c - M_{disp} c_{disp}}{M_{sable}} \quad (\text{VII-58})$$



En utilisant cette définition, on calcule l'évolution du coefficient de frottement propre au sable pour les différences accélérations étudiées en fonction de la masse de sable vibrée représenté Figure 152. Les évolutions dépendent de l'intensité de l'accélération délivrée.

Pour  $\Gamma=10$ , le coefficient de friction  $c_{sable}$  augmente d'abord linéairement avec la masse de sable vibré. Nous pensons expliquer ce phénomène par le fait qu'à cette accélération et pour une faible masse (inférieure à 450 g), l'ensemble du milieu granulaire est gazéifié. L'énergie se dissipe principalement par des chocs entre grains et la quantité d'énergie dissipée dépend directement de la masse de sable introduite dans la boîte. Enfin, quand la boîte tend à devenir pleine, le comportement change radicalement car le milieu granulaire tend à devenir celui d'un solide vibré massif qui dissipe beaucoup moins d'énergie. Ceci explique la chute du coefficient de friction apparent du sable pour des quantités de sable supérieures à 500 g car l'effet de la friction grain/grain et grain/paroi disparaît.

Pour  $\Gamma=3$ , le coefficient de friction  $c_{sable}$  décroît continument avec la masse de sable introduite, de manière douce au début du remplissage et abrupte à la fin du remplissage. On explique ce phénomène par le fait qu'à cette accélération, le milieu granulaire n'est que faiblement fluidisé. Ainsi, plus on introduit de sable, plus la portion de sable ayant un comportement proche d'un solide est important. Hors, comme nous l'avons vu, un milieu vibré solide (milieu granulaire solidifié ou solide massif) dissipe moins d'énergie. Ainsi, à cette accélération, le comportement global du milieu se rapproche de plus en plus de celui d'un solide, et le coefficient de friction apparent décroît continument.

Pour  $\Gamma=5$ , le comportement est intermédiaire. Au début du remplissage (jusqu'à 250 g de sable introduit environ), le coefficient de friction apparent du sable  $c_{sable}$  augmente car on augmente alors la portion de sable gazéifié. Ensuite, si on introduit encore du sable, les couches du fond deviennent peu mobiles sous le poids des couches supérieures et ont alors un comportement sous vibrations plus proche de celui d'un solide massif. A mesure que l'on remplit la boîte, le comportement du milieu granulaire est alors de plus en plus proche de celui d'un solide. Le coefficient de friction apparent décroît alors jusqu'à ce que le taux de remplissage maximal de la boîte soit atteint.

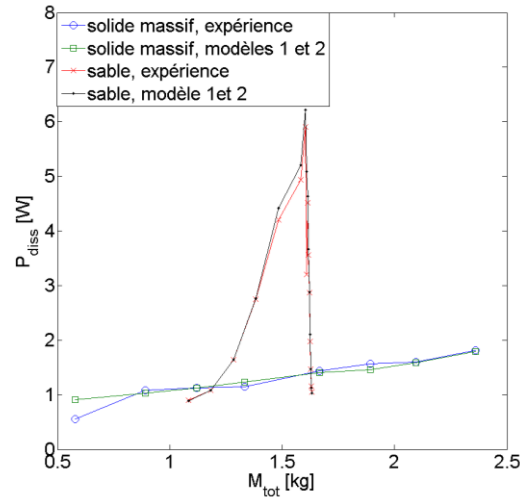


Figure 150. Puissances dissipées calculées directement et à l'aide du modèle 1 ou 2 pour  $\Gamma=10$ ,  $f=50$  Hz, en fonction de la masse totale vibrée

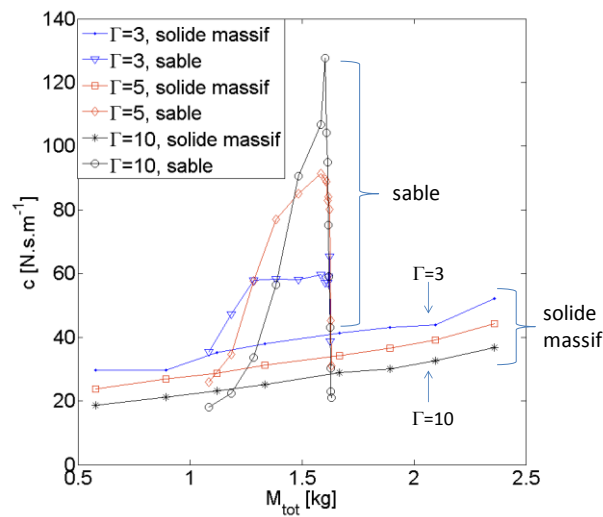


Figure 151. Coefficient de frottement apparent instantané pour  $\Gamma=3, 5$  et  $10$  en fonction de la masse totale vibrée. Pour les solides massifs, les évolutions peuvent être assimilées à des droites d'équations  $c=a M_{tot}+b$

Pour  $\Gamma=3$ ,  $a=11,9 \text{ N.s.m}^{-1}.\text{kg}^{-1}$  et  $b=21,2 \text{ N.s.m}^{-1}$

Pour  $\Gamma=5$ ,  $a=10,9 \text{ N.s.m}^{-1}.\text{kg}^{-1}$  et  $b=16,8 \text{ N.s.m}^{-1}$

Pour  $\Gamma=10$ ,  $a=9,8 \text{ N.s.m}^{-1}.\text{kg}^{-1}$  et  $b=12,4 \text{ N.s.m}^{-1}$

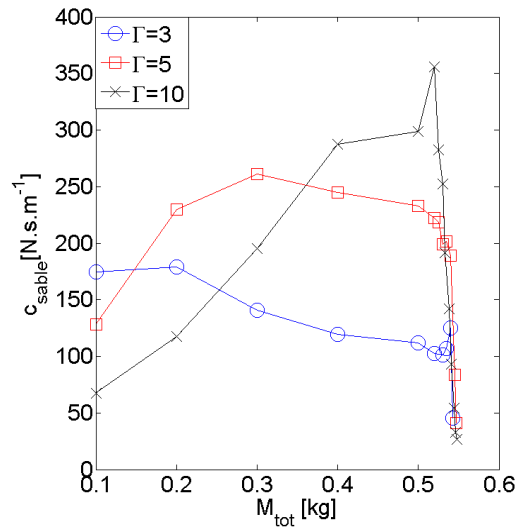


Figure 152. Estimation du coefficient de friction de la masse de sable vibrée

## Conclusion du chapitre VII

*Résultats expérimentaux :*

- Pour un milieu granulaire vibré confiné et ayant une source d'alimentation en grains sur le toit, on obtient les plus forts taux de remplissage (68 %) aux plus fortes accélérations (ce qui peut sembler paradoxal). Ce taux correspond alors à la compacité maximale du milieu granulaire.
- Le milieu granulaire peut devenir complètement bloqué à très forte accélération et son comportement est alors celui d'un solide massif soumis à des vibrations.
- Un solide (massif, ou milieu granulaire figé) vibré dissipe jusqu'à 5 fois moins d'énergie qu'un milieu granulaire mobile vibré.
- La fin de la compaction peut se déterminer quand la dissipation d'énergie induite par le milieu granulaire devient identique à celle d'un solide massif de même masse.

*Modèles de dissipation développés :*

Plusieurs modèles permettent de représenter le comportement global du milieu granulaire vibré.

- Le modèle 1-OAC permet de trouver un rapport constant entre la puissance dissipée et un coefficient  $\mu$  de frottement solide-support. Ce rapport est alors proportionnel à la masse vibrée.
- Le modèle 1-OAV permet de trouver un rapport constant entre la puissance dissipée et un coefficient de frottement visqueux apparent  $c$ . Ce rapport ne dépend pas de la masse vibrée.
- Le modèle 1-OAC&V hybride permet d'expliquer toutes les variations de puissance dissipée pour un solide massif. S'il est exact, ces variations impliquent que lorsqu'on augmente l'accélération, le frottement coulombien augmente et le frottement visqueux diminue puis atteint une valeur palier (d'autres accélérations devraient être considérées pour vérifier ces assertions).
- Le modèle 2 (OHA) permet de trouver un rapport constant entre la puissance dissipée et un coefficient de frottement visqueux apparent. Il explique aussi le décalage constant rencontré dans les expériences sur des solides massifs entre la masse apparente mesurée et la masse totale vibrée.
- Le modèle 3 (CF) reproduit très bien les variations de masse apparente instantanées constatées, mais reste difficile à mettre en œuvre car beaucoup de paramètres doivent être déterminés de manière empirique.

## Conclusion générale

Rappelons que cette thèse comportait un double objectif industriel et scientifique.

Au niveau industriel, nous cherchions des solutions permettant d'optimiser un dispositif de remplissage de fusibles à haut pouvoir de coupure par du sable. L'objectif principal était d'obtenir un milieu granulaire le plus dense et le plus homogène possible.

Au niveau scientifique, tous les phénomènes physiques intervenant lors d'une expérience de compaction granulaire par vibration horizontale pouvaient être dignes d'intérêt : présence de rouleaux, étude des vitesses de grains, étude paramétrique (influence de la fréquence, de l'accélération, de la taille de la boîte, ...). La bibliographie nous a montré que certaines études restaient à mettre en œuvre. En particulier :

- la mise en œuvre et l'exploitation d'une méthode de simulation permettant d'étudier les milieux granulaires soumis à des vibrations horizontales,
- l'influence de paramètres originaux comme la friction ou la taille du récipient, dans le cas des vibrations horizontales,
- l'étude des écoulements à travers des orifices de surface réduite permettant de mieux caractériser l'effet d'un obstacle (comme les lames conductrices dont la présence impose des espaces de circulation étroits dans les fusibles),
- l'étude d'un système -proche du procédé industriel- de remplissage sous vibration avec un toit, avec l'évaluation de la qualité du remplissage de ce système fermé (ceci n'avait jamais, à notre connaissance, été étudié).

Deux études distinctes ont été entreprises sur un milieu granulaire soumis à des vibrations horizontales, afin de satisfaire à ces objectifs d'optimisation industrielle et d'approfondissement des connaissances :

- une étude d'un milieu granulaire vibré horizontalement contenu dans une boîte semi-ouverte (ouverte sur le dessus). Dans ce cas, les résultats expérimentaux obtenus ont été comparés à des résultats de modélisation basée sur la méthode des éléments discrets (DEM).
- une étude de remplissage, où un couvercle ainsi qu'un système d'alimentation en grain par entonnoir a été fixé sur le dessus de la boîte. Une instrumentation

## Conclusion

nouvelle combinant capteur de force et accéléromètre a été élaborée dans ce cas. Les résultats expérimentaux de puissance dissipée dans le milieu vibré ont été comparés à des modèles descriptifs.

### *Réalisation et mise au point du dispositif expérimental*

*Le dispositif expérimental* combine un pot vibrant électromagnétique et un plateau métallique coulissant monté sur des roulements à billes sur lequel une boîte en plexiglas est collée. Une instrumentation extérieure permet de mesurer la densité du milieu granulaire par profilométrie optique (densité globale), ainsi que les vitesses de grains en surface de la boîte vibrée (système PIV). Nous pouvons aussi visualiser les densités après vibration par tomographie X (densités locales pour des petites boîtes). Les récipients contenant le sable sont constitués de plexiglas d'environ 10 mm d'épaisseur. Pour faciliter le repérage dans l'espace, une terminologie Nord/Sud/Est/Ouest est associée à l'expérience de vibration, l'axe Nord/Sud étant celle des vibrations.

### *Milieu granulaire utilisé*

*Le milieu granulaire* a été caractérisé précisément. C'est un sable constitué de quartz  $\alpha$  de masse volumique  $2,65 \text{ g.cm}^{-3}$ , de granulométrie présentant un diamètre moyen en nombre  $\langle d_g \rangle = 508 \text{ } \mu\text{m}$  avec un écart type de  $122 \text{ } \mu\text{m}$ . Les grains ont une forme peu arrondie, de sphéricités diverses selon la classification de Powers. L'angle de talus du sable a été mesuré ( $37,5^\circ$ ), et sa coulabilité caractérisée (indice 4 mesuré au Flodex correspondant à un milieu non cohésif et très fluide).

### *Description et validation de la méthode de simulation numérique*

*La méthode des éléments discrets* est basée sur le calcul, à chaque incrément de temps, des forces s'exerçant sur les grains. Ces forces dépendent de la distance d'interpénétration entre grains ou grains/paroi et de divers paramètres caractérisant le matériau granulaire, comme les coefficients de friction, le coefficient de restitution lors des chocs entre grains, la densité volumique des grains... Le déplacement s'opérant durant un pas de temps est ensuite évalué grâce aux lois de Newton. Les paramètres choisis dans le modèle reprennent dans la mesure du possible ceux de l'expérience. Si cette opération n'est pas possible, nous basons la valeur des paramètres sur celle donnée

dans la bibliographie. Un travail de post-traitement permet de passer des informations relatives aux grains (« vision lagrangienne ») aux informations relatives au milieu granulaire en fonction de la position examinée (« vision eulérienne »). Diverses valeurs comme la compacité et les vitesses de grain peuvent ainsi être comparées aux valeurs expérimentales. Des informations nouvelles comme les contraintes, les flux de grains ou encore les vitesses à l'intérieur de l'empilement granulaire sont rendues accessibles par l'outil de simulation. L'introduction de conditions aux limites périodiques permet de réduire avantageusement le temps de calcul et de représenter une boîte très large (théoriquement infinie) dans la direction  $y$  (perpendiculaire aux vibrations). L'influence de la dimension de la cellule périodique a été étudiée : 10 fois le diamètre moyen des grains constitue la dimension minimale et optimale à donner à la cellule pour obtenir des résultats représentatifs. En effet, la phénoménologie n'évolue plus si on augmente encore la taille de la cellule alors que le temps de calcul continue à augmenter. Une distinction est établie entre le coefficient de friction local  $\mu_{g/g}$  et le coefficient de friction équivalent global  $\mu_s$  propre à l'ensemble du milieu granulaire.

*Un test de validité* de nos algorithmes et des paramètres choisis, a été effectué en comparant les profils de vitesses des grains en face Nord obtenus par simulation et à l'aide du dispositif expérimental ( $\Gamma=3$ ,  $f=50$  Hz). Une excellente corrélation entre les vitesses de grains mesurées dans les expériences et celles obtenues en simulation a été établie pour des grains de même forme et de même diamètre (grains sphérique de 2 mm) : vitesses maximales en face Nord et largeur du pic à mi-hauteur identiques. Une très bonne corrélation est également trouvée pour des grains de mêmes diamètres et de formes différentes (sphère modèle (mod) et sable expérimental (exp)) : pour des grains de diamètre moyen 0,5 mm et 1 mm, on retrouve les mêmes vitesses de chute maximale mais la largeur de pic à mi-hauteur du profil de vitesse en face Nord est légèrement plus étroite en simulation que dans l'expérience. L'influence de la taille des grains a été mise en évidence. Le passage à des grains de diamètre double entraîne une division par 7 de la vitesse de chute en face Nord. Le comportement des grains reste similaire malgré l'augmentation de la taille des grains : présence de rouleaux, compaction... Nous avons choisi d'utiliser dans nos travaux des grains de diamètre double et une paroi périodique, compromis qui s'est avéré nécessaire afin de limiter les temps de calcul.

### *Vibrations horizontales du sable dans une boîte semi-ouverte*

*Les principaux phénomènes* relatifs au comportement du milieu granulaire vibré horizontalement ont été étudiés. On constate l'apparition d'un espace de faible densité près des parois Nord/Sud (mod). Celui-ci est l'une des causes de l'apparition des rouleaux de convection (bibliographie). Un régime stationnaire met environ 6 secondes à s'installer (mod). Cette valeur est cohérente avec celle donnée par de précédentes expériences (bibliographie). En régime stationnaire, on constate l'équilibre des flux de grains entre différentes zones du milieu granulaire. Ceci signifie qu'il n'y a plus d'évolution locale ou globale de densité en régime stationnaire. Notons que les différences phénoménologiques sont très faibles à partir de 2 secondes de vibration. Les mesures de densité et de vitesse qui ont été réalisées à partir de cette période (compromis avéré nécessaire pour diminuer le temps de calcul) peuvent être considérées comme obtenues en régime quasi stationnaire. La vitesse des grains augmente avec l'accélération (mod+exp), la taille de la boîte (mod+exp), le coefficient de friction (mod) entre grains  $\mu_{g/g}$  ou grain/paroi  $\mu_{g/m}$ . Cette vitesse diminue par contre avec la fréquence (mod+bibliographie). On retrouve donc des évolutions de densité similaires quand on augmente l'accélération, la taille de la boîte, ou que l'on diminue la fréquence. On note qu'une mise en mouvement des couches du fond permet de gagner en compacité globale, mais une fluidisation des couches de surface peut conduire à une perte de compacité. Pour  $\mu_{g/g}$  proche de 0, on note une inversion des rouleaux de convection (mod). La densité moyenne augmente quand  $\mu_{g/g}$  diminue (mod). Cette inversion dépend du coefficient de friction et explique certains résultats numériques surprenants présents dans la littérature. En simulation et en expérience, aucune ségrégation significative n'est constatée. Toutes nos études montrent une bonne corrélation entre résultats de simulation DEM et expériences dans l'étude des milieux granulaires vibrés de manière horizontale.

*L'étude des contraintes* au niveau du milieu granulaire en régime dynamique apporte des informations originales. Il est constaté une zone de faible cisaillement à l'altitude où les vitesses des grains s'annulent, ainsi qu'une zone de glissement total à l'altitude où les vitesses instantanées horizontales passent d'une orientation Nord/Sud à une orientation Sud/Nord.

*Une étude des écoulements de grains* à travers des orifices circulaires a été entreprise. Nous avons tout d'abord étudié l'influence du diamètre d'écoulement. On constate que pour un diamètre d'orifice inférieur à deux fois le diamètre moyen des



grains, aucun écoulement n'est possible. Pour des diamètres d'orifice supérieurs à six fois le diamètre moyen, le débit d'écoulement est proportionnel à la surface d'écoulement (soit au carré de la taille de l'orifice). L'étude montre globalement des analogies avec l'étude portant sur les densités et les vitesses de grains. En effet, les zones où les grains s'écoulent facilement correspondent globalement aux zones où les vitesses de grains sont les plus grandes. Les zones où le débit d'écoulement est le plus faible correspondent aux zones bloquées. Le débit moyen augmente avec l'accélération adimensionnée  $\Gamma$ . Il est multiplié par 20 quand  $\Gamma$  passe de 1 à 5. Le débit moyen diminue avec la fréquence  $f$ . Il est divisé par 10 environ quand  $f$  passe de 20 à 200 Hz. Une exception est faite pour les couches profondes de l'empilement granulaire où les écoulements semblent facilités pour les fortes fréquences.

### *Remplissage d'un récipient fermé*

Dans cette étude, la mesure de la force exercée par le pot vibrant et de l'accélération ressentie par le dispositif vibré ont été enregistrées simultanément à l'aide d'un capteur de force et d'un accéléromètre reliés par le biais d'une carte d'acquisition pilotée par le logiciel Labview. Un système d'alimentation en grains par le toit à l'aide d'un entonnoir permet de remplir progressivement la boîte vibrée. Cette étude a été réalisée à la fréquence de 50 Hz.

Quand le niveau du sable s'approche du couvercle du récipient, en fin de remplissage, le comportement observé diffère notablement de celui rencontré en milieu ouvert. On constate notamment que l'on obtient les plus forts taux de remplissage (68 %) aux plus fortes accélérations ( $\Gamma=10$ ). Ce taux correspond alors à la compacité maximale (Random Close Packing) du milieu granulaire, qui peut devenir complètement bloqué à très forte accélération (comportement opposé à celui constaté en milieu ouvert). Sa dissipation énergétique ainsi que sa masse apparente sont alors celles d'un solide massif soumis à des vibrations. Nous constatons qu'un solide (massif, ou milieu granulaire figé) vibré dissipe jusqu'à 5 fois moins d'énergie qu'un milieu granulaire mobile vibré. Nous remarquons que la fin de la compaction peut être détectée par le fait que la dissipation d'énergie induite par le milieu granulaire devient identique à celle d'un solide massif de même masse. A la suite de cette étude expérimentale, un brevet sur le contrôle du remplissage a été déposé.

## Conclusion

*Plusieurs modèles descriptifs* ont été développés afin d'expliquer les variations de puissance dissipée.

*Le modèle 1-OAC* basé sur un frottement de type coulombien, permet de trouver un rapport constant entre la puissance dissipée et un coefficient  $\mu$  de frottement solide-support. Ce rapport est alors proportionnel à la masse vibrée.

*Le modèle 1-OAV* permet de trouver un rapport constant entre la puissance dissipée et un coefficient de frottement visqueux apparent  $c$ . Ce rapport ne dépend pas de la masse vibrée. Ce modèle explique une grande partie des variations d'énergie dissipée constatée et sa simplicité permet de l'utiliser en temps réel. Il n'y a en effet qu'un rapport de proportionnalité entre le coefficient de friction (unique paramètre du modèle indépendant de l'expérience) et l'énergie dissipée. En utilisant ce modèle, on retrouve les mêmes ordres de grandeur du coefficient de friction équivalent pour toutes les accélérations étudiées. On retrouve aussi des tendances de variation avec la masse vibrée identiques : à la fin du remplissage, le coefficient de friction équivalent devient le même que celui d'un solide massif.

*Un modèle hybride 1-OAC&V* combinant puissance dissipée par frottement coulombien et par frottement visqueux explique toutes les variations de puissance dissipée en fonction de la masse totale constatée expérimentalement pour un solide massif. Ce modèle ne permet pas d'évaluer de manière analytique la force appliquée au dispositif. Dans notre série d'expériences, quand l'accélération augmente, le frottement coulombien a tendance à augmenter et le frottement visqueux a tendance à diminuer légèrement avant d'atteindre un palier.

*Le modèle 2 (OHA)*, où un ressort linéaire est introduit, permet de trouver le même rapport que le modèle 1-OAV entre la puissance dissipée et un coefficient de frottement visqueux apparent. Il explique aussi le décalage constant rencontré dans les expériences sur des solides massifs entre la masse apparente mesurée et la masse totale vibrée.

*Le modèle 3 (CF)*, où le milieu granulaire est représenté par un charriot frottant « ballotté » à l'intérieur de la boîte, reproduit très bien les variations observées de la masse apparente instantanée. Néanmoins, il reste difficile à mettre en œuvre car beaucoup de paramètres doivent être déterminés de manière empirique et il n'existe pas de solution analytique permettant d'évaluer la force appliquée.

Comme la complexité du système réel est grande, pour bien représenter l'énergie dissipée par le milieu granulaire et sa masse apparente, il faudrait introduire un modèle

très complexe combinant le modèle 1-OAC&V et le modèle 3. Il est peut-être possible de déterminer les paramètres d'un tel modèle pour certaines conditions expérimentales.

### *Perspectives*

De nombreux résultats nouveaux ont été obtenus par rapport à la bibliographie existante durant ce travail de thèse. Malgré tout, de nombreuses thématiques comme l'étude de vibrations complexes se rapprochant plus des chocs (imposés dans les ensableuses industrielles), l'étude des effets de l'air sur la compaction, la mise en place de vibrations combinant des composantes verticales et horizontales mériteraient aussi d'être étudiées.

Des études plus exhaustives sur le remplissage avec un toit et la caractérisation du remplissage par des mesures indirectes, ainsi que sur l'étude dynamique des contraintes dans un milieu granulaire vibré horizontalement, pourraient être envisagées. D'autres méthodes de caractérisation indirecte du remplissage pourraient aussi être développées (étude des émissions acoustiques par exemple).



# ANNEXES

## I. Notion de contrainte et Cercle de Mohr

### A. Contrainte moyenne dans un milieu granulaire

Hypothèse 1 :  $\sigma_{ij}$  est continu et dérivable

Hypothèse 2 : le système se trouve dans un état d'équilibre

Hypothèse 3 : la force volumique s'exerçant sur une particule contribue de façon insignifiante à la contrainte qui s'exerce sur cette même particule (c'est surtout le milieu environnant qui soumet la particule à des forces prédominantes).

La contrainte moyenne s'exerçant sur un volume  $V$  s'écrit :

$$\overline{\sigma_{ij}} = \frac{1}{V} \int_V \sigma_{ij} n_i dV \quad (\text{A-1})$$

Si le volume considéré est une particule :

$$\overline{\sigma_{ij}}^{(p)} = \frac{1}{V^{(p)}} \int_{V^{(p)}} \sigma_{ij} n_i dV^{(p)} \quad (\text{A-2})$$

En utilisant la convention d'Einstein de sommation ainsi qu'une intégration par partie, on peut écrire l'identité valable pour un tenseur  $S_{ij}$  :

$$S_{ij} = \delta_{ik} S_{kj} = \frac{\partial x_i}{\partial x_k} S_{kj} = \frac{\partial (x_i S_{kj})}{\partial x_k} - x_i \frac{\partial S_{kj}}{\partial x_k} \quad (\text{A-3})$$

Cette équation nous permet de réécrire (A-2) :

$$\overline{\sigma}_{ij}^{(p)} = \frac{1}{V^{(p)}} \int_{V^{(p)}} \left[ \frac{\partial(x_i \sigma_{kj}^{(p)})}{\partial x_k} - x_i \frac{\partial \sigma_{kj}^{(p)}}{\partial x_k} \right] dV^{(p)} \quad (\text{A-4})$$

Pour une particule, on considère que  $\frac{\partial \sigma_{kj}^{(p)}}{\partial x_k} = -F_j \approx 0$  (Hypothèse 3 et équation (A-1)). En utilisant le théorème de la divergence, on obtient :

$$\overline{\sigma}_{ij}^{(p)} = \frac{1}{V^{(p)}} \int_{V^{(p)}} (x_i \sigma_{kj}^{(p)}) n_k dS^{(p)} = \frac{1}{V^{(p)}} \int_{V^{(p)}} x_i T_j^{(p)} dS^{(p)} \quad (\text{A-5})$$

- $n_k$  est la  $k^{\text{ième}}$  composante du vecteur normal sortant de la surface  $dS^{(p)}$ .
- $T_j^{(p)}$  est la  $j^{\text{ième}}$  composante de la contrainte s'exerçant sur la surface  $dS^{(p)}$ , aussi appelé vecteur « traction ».

Numériquement, chaque particule est soumise à des forces agissant sur des contacts ponctuels. On peut alors réécrire la sommation sous la forme d'une somme discrète :

$$\overline{\sigma}_{ij}^{(p)} = -\frac{1}{V^{(p)}} \sum_{N_c} x_i^{(c)} F_j^{(c)} \quad (\text{A-6})$$

où  $p$  désigne la particule,  $c$  un contact et  $N_c$  le nombre de contact.

Le signe - a été introduit pour respecter la convention :

- Compression  $\Rightarrow$  trace  $\sigma_{ij} < 0$
- Extension  $\Rightarrow$  trace  $\sigma_{ij} > 0$

On peut réécrire  $x_i^{(c)}$  de la manière suivante :

$$x_i^{(c)} = x_i^{(p)} + |x_i^{(c)} - x_i^{(p)}| n_i^{(c)} \quad (\text{A-7})$$

D'après la loi fondamentale de la dynamique, pour un solide à l'équilibre, la somme des forces (ainsi que la somme des moments) est nulle. On a donc :

$$\sum_{N_c} F_j^{(c)} = 0 \quad (\text{A-8})$$

En utilisant les équations (A-8) et (A-7) dans l'équation (A-6), on obtient finalement l'expression du tenseur moyen des contraintes sur une particule  $p$  (expression utilisée en simulation numérique) :

$$\overline{\sigma_{ij}}^{(p)} = -\frac{1}{V^{(p)}} \sum_{Nc} |x_i^{(c)} - x_i^{(p)}| n_i^{(c)} F_j^{(c)} \quad (\text{A-9})$$

On peut ensuite moyenner cette contrainte en prenant en compte un volume  $V$  contenant un ensemble de particules. En utilisant la formule (A-1) sachant que  $\sigma_{ij} = 0$  hors des grains, on trouve :

$$\langle \overline{\sigma_{ij}} \rangle_V = \frac{\sum_p V_p \sigma_{ij}^{(p)}}{V} \quad (\text{A-10})$$

où  $p$  désigne l'indice de la particule contenue dans  $V$ , et  $V_p$  le volume de la particule contenue dans  $V$  (pas nécessairement le volume total de la particule).

## B. Cercle de Mohr Détermination d'une contrainte quelconque connaissant 2 contraintes perpendiculaires

En un point  $M$  donné du milieu, considérons un élément de surface dont la normale  $\vec{n}$  est incluse dans le plan  $(Oxy)$  et forme un angle  $\theta$  avec l'axe des abscisses  $(Ox)$ .

On suppose dans cette analyse que l'on connaît les contraintes s'exerçant sur 2 plans perpendiculaires aux axes  $\vec{Ox}$  et  $\vec{Oy}$  dans un système à l'équilibre et que « la profondeur des plans » selon  $\vec{Oz}$  est de 1. On note  $L_x$  la longueur du côté perpendiculaire à  $\vec{Ox}$ ,  $L_y$  celle du côté perpendiculaire à  $\vec{Oy}$  et  $L_n$  l'hypoténuse du triangle de petits côtés  $L_x$  et  $L_y$ .

$\theta$  est l'angle que forment les côtés de longueur  $L_x$  et  $L_y$ . Du fait de la simplification d'un problème en 3 dimensions à un problème en 2 dimensions, nous parlerons de longueurs au lieu d'aires pour des raisons de simplicité.

L'équilibre des forces sur le triangle impose (Figure 153):

$$\vec{F}_x + \vec{F}_y + \vec{F}_n = 0 \quad (\text{A-11})$$

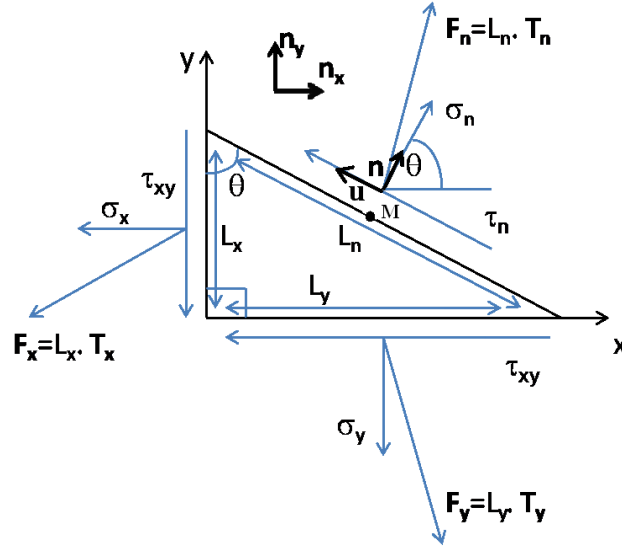


Figure 153. Représentation des contraintes dans un espace 2D (profondeur unité selon  $\vec{Oz}$ )

Les contraintes représentant des forces par unité de surface, on peut écrire cette relation sous la forme :

$$\begin{cases} \vec{T}_n \cdot \vec{e}_x \cdot L_n + \vec{T}_x \cdot \vec{e}_x \cdot L_x + \vec{T}_y \cdot \vec{e}_x \cdot L_y = 0 \\ \vec{T}_n \cdot \vec{e}_y \cdot L_n + \vec{T}_x \cdot \vec{e}_y \cdot L_x + \vec{T}_y \cdot \vec{e}_y \cdot L_y = 0 \end{cases} \quad (\text{A-12})$$

Or,

$$\begin{cases} L_x = L_n \cdot \cos \theta \\ L_y = L_n \cdot \sin \theta \end{cases} \quad (\text{A-13})$$

De plus, par projection (Figure 153), on obtient les contraintes sur la face de normale  $\vec{n}$  :

$$\begin{cases} T_x^{(n)} = \sigma_n \cdot \cos \theta - \tau_n \cdot \sin \theta \\ T_y^{(n)} = \sigma_n \cdot \sin \theta - \tau_n \cdot \cos \theta \end{cases} \quad (\text{A-14})$$



En utilisant les équations (I-19), (I-20), (A-13), (A-14), la relation (A-12) donne alors accès aux contraintes sur la face de normale  $\vec{n}$  :

$$\begin{cases} (\sigma_n \cos \theta - \tau_n \sin \theta) L_n - \sigma_x L_n \cos \theta - \tau_{xy} L_n \sin \theta = 0 \\ (\sigma_n \sin \theta - \tau_n \cos \theta) L_n - \tau_{xy} L_n \cos \theta - \sigma_y L_n \sin \theta = 0 \end{cases} \quad (\text{A-15})$$

$$\Rightarrow \begin{cases} (\sigma_n - \sigma_x) \cos \theta - (\tau_n + \tau_{xy}) \sin \theta = 0 & (a) \\ (\sigma_n - \sigma_y) \sin \theta - (\tau_n + \tau_{xy}) \cos \theta = 0 & (b) \end{cases} \quad (\text{A-16})$$

En multipliant les expressions (A-16) (a) et (A-16) (b) par  $\cos \theta$  et  $\sin \theta$  et en ajoutant le résultat puis par  $\sin \theta$  et  $\cos \theta$  et en les soustrayant, on obtient :

$$\Rightarrow \begin{cases} \sigma_n = \sigma_x \cos^2 \theta + \sigma_y \sin^2 \theta + 2\tau_{xy} \sin \theta \cos \theta \\ \tau_n = -(\sigma_x - \sigma_y) \cos \theta \sin \theta - \tau_{xy} (\sin^2 \theta - \cos^2 \theta) \end{cases} \quad (\text{A-17})$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \sigma_n = \sigma_x \frac{1 + \cos 2\theta}{2} + \sigma_y \frac{1 - \cos 2\theta}{2} + \tau_{xy} \sin 2\theta \\ \tau_n = -\frac{(\sigma_x - \sigma_y)}{2} \sin 2\theta + \tau_{xy} \cos 2\theta \end{cases} \quad (\text{A-18})$$

Soit finalement :

$$\Rightarrow \begin{cases} \sigma_n = \frac{1}{2}(\sigma_x + \sigma_y) + \frac{1}{2}(\sigma_x - \sigma_y) \cos 2\theta + \tau_{xy} \sin 2\theta \\ \tau_n = -\frac{(\sigma_x - \sigma_y)}{2} \sin 2\theta + \tau_{xy} \cos 2\theta \end{cases} \quad (\text{A-19})$$

## C. Modèle de Janssen

Nous présentons ici le modèle de Janssen permettant de calculer la pression dans un milieu granulaire statique, en fonction de la profondeur dans l'empilement. La géométrie considérée ici est cylindrique. Notons que pour toute autre géométrie (parallélépipédique par exemple), la résolution conduirait au même type de résultat en introduisant des facteurs de forme supplémentaires.

Ce modèle nécessite d'admettre certaines hypothèses difficiles à justifier. Néanmoins, il rend assez bien compte de la distribution réelle des contraintes. On considère un tube cylindrique de diamètre  $D$  rempli d'un milieu granulaire de masse volumique apparente  $\rho$  (Figure 10). On cherche à calculer la contrainte qui s'exerce dans le récipient en fonction de la profondeur.

*Hypothèses du modèle de Janssen :*

1. La contrainte verticale  $\sigma_{zz}$  est uniforme à une altitude  $z$  donnée.
2. Le milieu s'appuie sur les parois par frottement et se trouve à la limite du glissement. On note la contrainte tangentielle  $\tau = \mu\sigma_{xx}$  où  $\mu$  est le coefficient de friction mur-grains, et  $\sigma_{xx}$  la contrainte normale horizontale au niveau du mur.
3. Il existe une relation de proportionnalité entre la contrainte normale horizontale et verticale :  $\sigma_{xx} = K\sigma_{zz}$  où  $K$  est une constante. Pour un fluide statique, on aurait  $K=1$  car la pression y est isotrope.

*Equation d'équilibre du milieu granulaire dans le modèle de Janssen :*

Avec ces hypothèses, on peut écrire l'équation d'équilibre d'une tranche du cylindre d'épaisseur  $dz$  (Figure 154). Celle-ci est soumise aux forces suivantes :

- Forces sur les sections inférieure et supérieure de la tranche :  $F_1 = \frac{\pi D^2}{4} \sigma_{zz|z}$  et  $F_2 = -\frac{\pi D^2}{4} \sigma_{zz|z+dz}$
- Forces sur les parois latérales :  $F_3 = -\pi D dz \tau = -\pi D dz \mu \sigma_{xx} = -\pi D dz \mu K \sigma_{zz}$  (obtenues en utilisant les hypothèses 2 et 3)
- Force de gravité :  $F_4 = \rho g dz \frac{\pi D^2}{4}$

En simplifiant divisant par le volume  $\frac{\pi D^2}{4} dz$  de la tranche, on obtient alors

l'expression de la dérivée selon  $z$  de la contrainte normale :

$$\sigma_{zz}' = \frac{\sigma_{zz}|_{z+dz} - \sigma_{zz}|_z}{dz} = \frac{4}{\pi D^2} \left[ -\pi D \mu K \sigma_{zz} + \rho g \frac{\pi D^2}{4} \right] \Rightarrow \frac{d\sigma_{zz}}{dz} = -\frac{4\mu K \sigma_{zz}}{D} + \rho g = \rho g - \frac{\sigma_{zz}}{\lambda},$$

$$\text{où } \lambda = \frac{D}{4\mu K}.$$

Sachant que la contrainte est nulle à la surface en  $z=0$  (en absence de contrainte extérieure), on trouve par intégration la loi de variation de la contrainte verticale :

$$\sigma_{zz} = \rho g \lambda (1 - \exp(-\frac{z}{\lambda})) \quad (\text{A-20})$$

On notera que si  $z$  est très petit devant  $\lambda$ , la pression augmente linéairement avec l'altitude (on retrouve la loi d'évolution hydrostatique de la pression). Si la profondeur  $z$  est très grande devant  $\lambda$ , la pression atteint asymptotiquement une limite supérieure à la valeur  $\sigma_{zz} = \rho g \lambda = C^{te}$ .

Pour des valeurs typiques  $\mu \approx 0.5$  et  $K \approx 1$ , on obtient  $\lambda = 2$ .

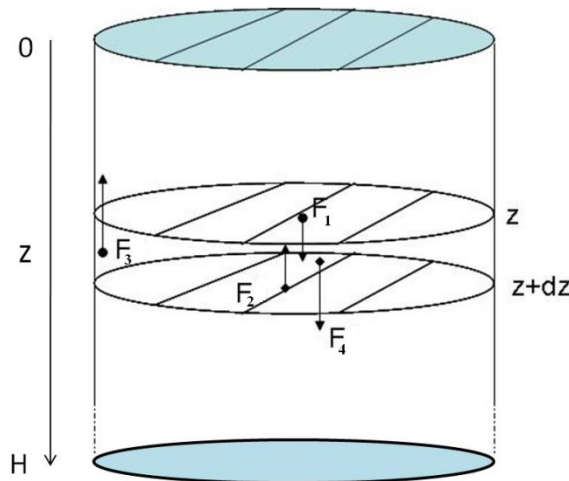


Figure 154. Représentation schématique des notations utilisées pour calculer l'équation de Janssen

## D. Etats actifs et passifs de Rankine

Rankine a déterminé les états de contraintes amenant à l'effondrement ou l'écrasement du milieu granulaire. Les contraintes exercées dans une géométrie supposée infiniment large sont représentées sur la Figure 155. Pour un milieu infiniment étendu sur

$x$ , la contrainte verticale  $\sigma_{yy}$  est supposée adopter la loi d'évolution de la pression hydrostatique :

$$\sigma_{yy} = \rho g y \quad (\text{A-21})$$

Où  $\rho$  est la masse volumique apparente du milieu granulaire et  $y$  la coordonnée de profondeur des grains. Si la contrainte latérale est diminuée jusqu'à la valeur critique  $\sigma_{xA}$ , il y aura effondrement ou « rupture active ». Si la contrainte est augmentée jusqu'à  $\sigma_{xP}$ , il y aura écrasement ou « rupture passive ». On définit les coefficients de Rankine actifs  $\kappa_A$  et passifs  $\kappa_P$  de la manière suivante

$$\kappa_A = \frac{\sigma_{xA}}{\sigma_{yy}} = \frac{\sigma_{xA}}{\rho g y} = \frac{1 - \sin \phi}{1 + \sin \phi} \quad (\text{A-22})$$

Où  $\phi$  est l'angle de frottement interne.

$$\kappa_P = \frac{\sigma_{xP}}{\sigma_{yy}} = \frac{\sigma_{xP}}{\rho g y} = \frac{1 + \sin \phi}{1 - \sin \phi} = \frac{1}{\kappa_A} \quad (\text{A-23})$$

Les contraintes maximales et minimales pouvant être appliquées sans rupture du milieu granulaire peuvent alors être évaluées en fonction des coefficients de Rankine :

$$\sigma_{\min} = \sigma_{xA} = \kappa_A \rho g y < \sigma_{xx} < \kappa_P \rho g y = \sigma_{xP} = \sigma_{\max} \quad (\text{A-24})$$

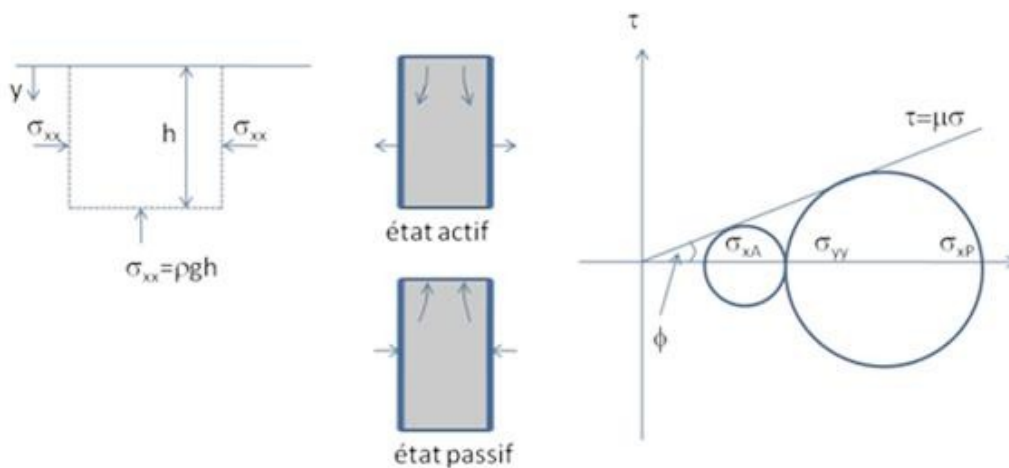


Figure 155. A gauche : représentation schématique du milieu granulaire (considéré infini sur l'axe  $x$ ). Au centre : les états de contraintes critiques, actif et passif. A droite : représentation des cercles de Mohr correspondant aux deux états

## II. Evaluation du coefficient de rigidité normal (approche élastique)

Considérons deux sphères en contact s'interpénétrant sur une distance  $\delta$ . Supposons que le rapport entre les rayons des sphères  $r_g$  et le rayon du cylindre formé par la section de contact  $r_c$  soit égal à  $\alpha$  (Figure 156).

La loi de Hooke nous donne la contrainte subie par les sphères en fonction de la (A-25)  
déformation relative du cylindre  $\varepsilon = \frac{\delta}{2r_g}$  et du module d'Young  $E$  :  $\sigma = E\varepsilon$

De plus, cette contrainte est égale à la force exercée par un grain sur un autre par unité de surface :

$$\sigma = \frac{F_n^{rigid}}{\pi(\alpha R)^2} \quad (\text{A-26})$$

Or  $F_n^{rigid} = k_n^{linaire} \delta$  dans le modèle linéaire, d'où :

$$k_n^{linaire} \equiv \frac{\pi E}{2} r_g \alpha^2 \quad (\text{A-27})$$

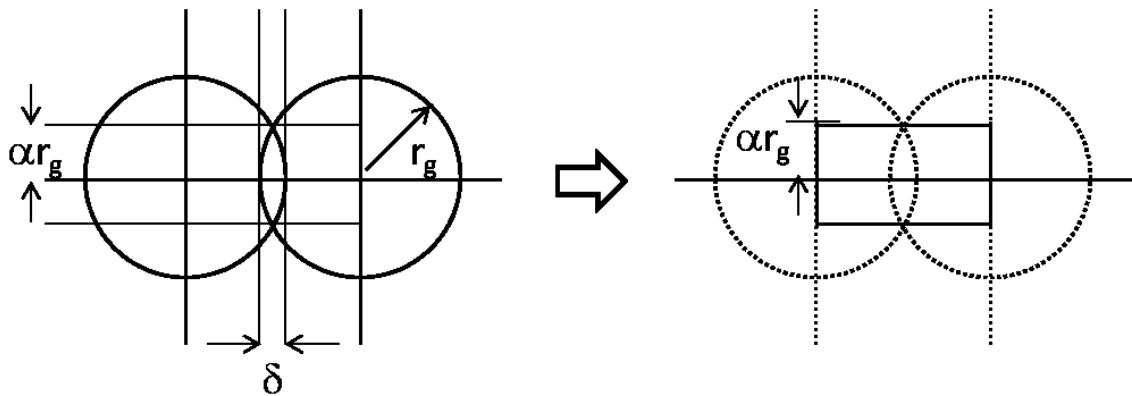


Figure 156. A gauche la représentation schématique d'une interpénétration. A droite, l'approximation du volume de contact à un cylindre de rayon  $\alpha r_g$  et de longueur  $2 r_g$



# Bibliographie

- [1] F. de Larrard et T. Sedran, « Mixture-proportioning of high-performance concrete », *Cement and concrete research*, vol. 32, n° 11, p. 1699–1704, nov. 2002.
- [2] J. Duran, *Sable, poudres et grains*. Eyrolles, 1999.
- [3] C. A. Coulomb, *Théorie des machines simples*. Bachelier, 1821.
- [4] M. Faraday, « On a peculiar class of acoustical figures; and on certain forms assumed by groups of particles upon vibrating elastic surfaces », *Philosophical Transactions of the Royal Society of London*, vol. 121, p. 299–340, janv. 1831.
- [5] W. J. M. Rankine, « On the stability of loose earth », *Philosophical Transactions of the Royal Society of London*, vol. 147, p. 9–27, janv. 1857.
- [6] H. A. Janssen, « Versuche über getreidedruck in silozellen », *Zeitschrift des Vereines deutscher Ingenieure*, vol. XXXIX, n° 35, p. 1045–1049, 1895.
- [7] O. Reynolds, « On the dilatancy of media composed of rigid particles in contact, with experimental illustrations », *Philosophical Magazine*, n° 20, p. 469–481, 1885.
- [8] R. A. Bagnold, « Experiments on a gravity-free dispersion of large solid spheres in a newtonian fluid under shear », *Proceedings of the Royal Society of London. Series A, Mathematical and Physical Sciences*, vol. 225, n° 1160, p. 49–63, 1954.
- [9] P. A. Cundall et O. D. L. Strack, « Discrete numerical-model for granular assemblies », *Geotechnique*, vol. 29, n° 1, p. 47–65, 1979.
- [10] J. B. Knight, C. G. Fandrich, C. N. Lau, H. M. Jaeger, et S. R. Nagel, « Density relaxation in a vibrated granular material », *Physical Review E*, vol. 51, n° 5, p. 3957–3963, mai 1995.
- [11] P. Philippe, « Etude théorique et expérimentale de la densification des milieux granulaires », *Thèse de doctorat*, Rennes I, 2002.
- [12] P. Ribière, « Etude de la compaction des milieux granulaires. De l'échelle locale à l'échelle globale. », *Thèse de doctorat*, Rennes I, 2005.
- [13] Hakon Wadell, « Volume, shape, and roundness of quartz particles », *The Journal of Geology*, vol. 43, n° 3, p. 250–280, avr. 1935.
- [14] M. C. Powers, « A new roundness scale for sedimentary particles », *Journal of Sedimentary Research*, vol. 23, n° 2, p. 117–119, juin 1953.
- [15] G. Onoda et E. Liniger, « Random loose packings of uniform spheres and the dilatancy onset », *Physical Review Letters*, vol. 64, n° 22, p. 2727–2730, mai 1990.
- [16] G. Scott et D. Kilgour, « Density of random close packing of spheres », *Journal of Physics D-Applied Physics*, vol. 2, n° 6, p. 863–&, 1969.
- [17] J. Berryman, « Random close packing of hard-spheres and disks », *Physical Review A*, vol. 27, n° 2, p. 1053–1061, 1983.
- [18] R. Al-Raoush et M. Alsaleh, « Simulation of random packing of polydisperse particles », *Powder Technology*, vol. 176, n° 1, p. 47–55, juill. 2007.
- [19] X. Jia, M. Gan, R. A. Williams, et D. Rhodes, « Validation of a digital packing algorithm in predicting powder packing densities », *Powder Technology*, vol. 174, n° 1–2, p. 10–13, mai 2007.
- [20] J.-P. Guillemin, « Rhéologie de suspensions concentrées de matériaux énergétiques recyclables - Modélisation du temps de coulée », Ecole des Mines de Saint-Etienne, 2008.
- [21] J. Liu et J. Zhou, « Numerical study on sandpile formation of granular materials with different grain size distributions », *Geotechnical Engineering for Disaster Mitigation and Rehabilitation*, p. 374–380, 2008.
- [22] M. Ghazavi, M. Hosseini, et M. Mollanouri, « A comparison between angle of repose and friction angle of sand », in *Proc. 12th International Conference of International Association for Computer Methods and Advances in Geomechanics (IACMAG)*, p. 1272–1275.
- [23] B. Cambou et M. Jean, *Micromécanique des matériaux granulaires*, Hermes science, 2001.

- [24] P. Dantu, « Contribution à l'Étude Mécanique et Géométrique des Milieux Pulvérulents », in *Proc. Of the 4th International Conf. On Soil Mech. and Foundation Eng.*, 1957, vol. 1, p. 144–148.
- [25] J. Christoffersen, M. M. Mehrabadi, et S. Nemat-Nasser, « A Micromechanical Description of Granular Material Behavior », *J. Appl. Mech.*, vol. 48, n° 2, p. 339–344, juin 1981.
- [26] P. M. C. Lacey, « Developments in the theory of particle mixing », *Journal of Applied Chemistry*, vol. 4, n° 5, p. 257–268, mai 1954.
- [27] J.-M. Missiaen, « Etude par analyse d'images des milieux granulaires : caractérisation des contacts et de l'homogénéité », *Thèse de doctorat*, Ecole Nationale supérieure des mines de Saint-Etienne, Saint-Etienne, 1989.
- [28] P. Evesque, « Quelques Aspects de la Dynamique des Milieux Granulaires », *Poudres & grains*, vol. 13, n° 4, p. 40–73, 2002.
- [29] G. Félix, « Ecoulements de milieux granulaires en tambour tournant. Étude de quelques transitions de régime. Application à la ségrégation », *Thèse de doctorat*, Institut National Polytechnique de Lorraine, Nancy, 2002.
- [30] L. Sanfratello et E. Fukushima, « MRI Studies of the Influence of Particle Density in 3D, Size-Segregating, Banding, Rotating Drum Systems », *AIP Conf. Proc.*, vol. 1145, n° 1, p. 667–670, juin 2009.
- [31] L. Franck, « Ecoulement de particules dans un milieu poreux », Rennes I, Rennes, 2007.
- [32] S. S. Hsiau et H. Y. Yu, « Segregation phenomena in a shaker », *Powder Technology*, vol. 93, n° 1, p. 83–88, sept. 1997.
- [33] K. Liffman, G. Metcalfe, et P. Cleary, « Granular convection and transport due to horizontal shaking », *Physical Review Letters*, vol. 79, n° 23, p. 4574–4576, 1997.
- [34] S. Ulrich, M. Schröter, et H. L. Swinney, « Influence of friction on granular segregation », *Phys. Rev. E*, vol. 76, n° 4, oct. 2007.
- [35] S. H. I. Qingfan, Y. A. N. Xuequn, H. O. U. Meiying, N. I. U. Xiaojuan, et L. U. Kunquan, « Experimental study of segregation patterns in binary granular mixtures under vertical vibration », *Chinese Science Bulletin*, vol. 48, n° 7, p. 627–629, 2003.
- [36] E. Rouèche, « Influence des paramètres de vibrations sur la rhéologie d'un milieu granulaire: Application au remplissage des fusibles », *Thèse de doctorat*, Ecole des Mines de Saint-Etienne, 2005.
- [37] J. K. Prescott et R. A. Barnum, « On powder flowability », *Pharmaceutical technology*, p. 60–85, oct. 2000.
- [38] J. Schwedes, « Measurement of flow properties of bulk solids », *Powder Technology*, vol. 88, n° 3, p. 285–290, sept. 1996.
- [39] A. Gioia, « Intrinsic flowability : a new technology for powder-flowability classification », *Pharmaceutical technology*, 1980.
- [40] A. J. Liu et S. R. Nagel, « Jamming is not just cool any more », *Nature*, vol. 396, n° 6706, p. 21–22, 1998.
- [41] E. Silbert, C. S. O'Hern, A. J. Liu, et S. R. NAGEL, « Unifying concepts in granular media and glasses », in *The properties of Jamming at Zero Temperature*, Capri, ITALY, 2004, p. 1–8.
- [42] B. Andreotti, Y. Forterre et O. Pouliquen, « Les milieux granulaires - entre fluide et solide », EDP Sciences, 2011
- [43] *Disorder and granular media*. D. Bideau and A. Hansen. 1993
- [44] C.-C. Liao et S.-S. Hsiau, « Influence of interstitial fluid viscosity on transport phenomenon in sheared granular materials », *Chemical Engineering Science*, vol. 64, p. 2562–2569, 2009.
- [45] P. Coussot et A. Ancey, « Rheophysical classification of concentrated suspensions and granular pastes », *Physical Review E*, vol. 59, n° 4, p. 4445–4457, 1999.
- [46] M. L. Hunt, R. Zenit, C. S. Campbell, et C. E. Brennen, « Revisiting the 1954 suspension experiments of R. A. Bagnold », *J. Fluid Mech.*, vol. 452, févr. 2002.
- [47] G. D. R. MiDi, « On dense granular flows », *The European Physical Journal E: Soft Matter and Biological Physics*, vol. 14, n° 4, p. 341–365, 2004.
- [48] A. Raihane, O. Bonnefoy, J. L. Gelet, J. M. Chaix, et G. Thomas, « Experimental study



- of a 3D dry granular medium submitted to horizontal shaking », *Powder Technology*, vol. 190, n°. 1–2, p. 252–257, 2009.
- [49] A. Raihane, « Etude du comportement des milieux granulaires vibrés horizontalement - Application au remplissage des fusibles », Ecole des Mines de Saint-Etienne, 2009.
- [50] H. J. Herrmann et S. Luding, « Modeling granular media on the computer », *Continuum Mechanics and Thermodynamics*, vol. 10, n°. 4, p. 189–231, 1998.
- [51] R. D. Mindlin et H. Deresiewicz, « Elastic spheres in contact under varying oblique forces », *Journal of Applied Mechanics-Transactions of the ASME*, vol. 20, n°. 3, p. 327–344, 1953.
- [52] P. A. Cundall, « Computer simulations of dense sphere assemblies », in *Micromechanics of granular materials*, 1988, p. 113–123.
- [53] J. H. Ginsberg et J. Genin, *Dynamics*, Second Edition. New-York: John Wiley and Sons, 1984.
- [54] A. Ollagnier, P. Doremus, et D. Imbault, « Contact particles calibration in order to use discrete element code », *presented at the Euro Pm*, Toulouse, 2007, p. 335–360.
- [55] G. De Josselin de Jong et A. Verruijt, « Etude photo-élastique d'un empilement de disques », vol. 2, p. 73–86.
- [56] G. W. Delaney, P. W. Cleary, M. Hilden, et R. D. Morisson, « Validation of DEM predictions of granular flow and separation efficiency for a horizontal laboratory scale wire mesh screen », *presented at the International Conference on CFD in the Minerals and Process Industry*, Melbourne, 2009.
- [57] P. W. Cleary, « Large scale industrial DEM modelling », *Engineering Computations*, vol. 21, n°. 2–4, p. 169–204, 2004.
- [58] S. Luding et S. McNamara, « How to handle the inelastic collapse of a dissipative hard-sphere gas with the TC model », *Granular Matter*, vol. 1, n°. 3, p. 113–128, 1998.
- [59] D. C. Richardson, K. J. Walsh, N. Murdoch, et P. Michel, « Numerical simulations of granular dynamics: I. Hard-sphere discrete element method and tests », *Icarus*, vol. 212, n°. 1, p. 427–437, mars 2011.
- [60] D. C. Richardson, P. Michel, K. J. Walsh, et K. W. Flynn, « Numerical simulations of asteroids modelled as gravitational aggregates with cohesion », *Planetary and Space Science*, vol. 57, n°. 2, p. 183–192, févr. 2009.
- [61] G. W. Baxter et R. P. Behringer, « Cellular automata models of granular flow », *Physical Review A*, vol. 42, n°. 2, p. 1017–1020, 1990.
- [62] G. W. Baxter et R. P. Behringer, « Cellular automata models for the flow of granular materials », *Physica D*, vol. 51, p. 465–471, 1991.
- [63] M. P. Sáenz et J. D. Munoz, « A cellular automaton for granular media under vibrations », *Proceeding of the 5th International Conference on Micromechanics of Granular Media, Stuttgart*, vol. 2, p. 1197–1200, 2005.
- [64] A. Raihane, O. Bonnefoy, J. M. Chaix, J. L. Gelet, et G. Thomas, « Analysis of the densification of a vibrated sand packing », *Powder Technology*, 2010.
- [65] E. Nowak, J. Knight, E. Ben-Naim, H. Jaeger, et S. Nagel, « Density fluctuations in vibrated granular materials », *Physical Review E*, vol. 57, n°. 2, p. 1971–1982, févr. 1998.
- [66] S. G. K. Tennakoon, L. Kondic, et R. P. Behringer, « Onset of flow in a horizontally vibrated granular bed: Convection by horizontal shearing », *EPL (Europhysics Letters)*, vol. 45, p. 470, 1999.
- [67] T. Pöschel, T. Schwager, et C. Saluena, « Onset of fluidization in vertically shaken granular material », *Physical Review E*, vol. 62, n°. 1, p. 1361–1367, 2000.
- [68] P. Evesque et J. Rajchenbach, « Instability in a sand heap », *Physical Review Letters*, vol. 62, n°. 1, p. 44–46, 1989.
- [69] S. S. Hsiau et S. J. Pan, « Motion state transitions in a vibrated granular bed », *Powder Technology*, vol. 96, n°. 3, p. 219–226, mai 1998.
- [70] M. Medved, « Connections between response modes in a horizontally driven granular material », *Physical Review E*, vol. 65, n°. 2, févr. 2002.
- [71] S. Aumaitre, C. Puls, J. N. McElwaine, et J. P. Gollub, « Comparing flow thresholds and dynamics for oscillating and inclined granular layers », *Physical Review E*, vol. 75, n°. 6, juin

2007.

- [72] J. Debayle, A. Raihane, A. Belhaoua, O. Bonnefoy, G. Thomas, J. M. Chaix, et J.-C. Pinoli, « Velocity field computation in vibrated granular media using an optical flow based multiscale image analysis method », *Image Analysis and Stereology* 28,35-43, 2009.
- [73] S. S. Hsiau et C. H. Chen, « Granular convection cells in a vertical shaker », *Powder Technology*, vol. 111, n°. 3, p. 210–217, sept. 2000.
- [74] J. A. C. Gallas, H. J. Herrmann, et S. Sokolowski, « Convection cells in vibrating granular media », *Physical Review Letters*, vol. 69, n°. 9, p. 1371–1374, août 1992.
- [75] A. J. Matchett, T. Yanagida, Y. Okudaira, et S. Kobayashi, « Vibrating powder beds: a comparison of experimental and Distinct Element Method simulated data », *Powder Technology*, vol. 107, n°. 1–2, p. 13–30, janv. 2000.
- [76] S. McNamara et S. Luding, « Energy flows in vibrated granular media », *Phys. Rev. E*, vol. 58, n°. 1, p. 813, juill. 1998.
- [77] S. Luding, « Granular materials under vibration: Simulations of rotating spheres », *Physical Review E*, vol. 52, n°. 4, p. 4442–4457, 1995.
- [78] E. R. Nowak, J. B. Knight, M. L. Povinelli, H. M. Jaeger, et S. R. Nagel, « Reversibility and irreversibility in the packing of vibrated granular material », *Powder Technology*, vol. 94, p. 79–83, 1997.
- [79] T. Elperin et E. Golshtein, « Effects of convection and friction on size segregation in vibrated granular beds », *Physica A: Statistical and Theoretical Physics*, vol. 247, n°. 1–4, p. 67–78, 1997.
- [80] M. Medved, D. Dawson, H. M. Jaeger, et S. R. Nagel, « Convection in horizontally vibrated granular material », *Chaos*, vol. 9, n°. 3, p. 691–696, sept. 1999.
- [81] C. Saluena et T. Poeschel, « Convection in horizontally shaken granular material », *European Physical Journal E*, vol. 1, n°. 1, p. 55–59, 2000.
- [82] C. R. Wassgren, « Vibration of granular materials », *Thèse de doctorat*, California Institute of Technology 1997.
- [83] R. C. Flemmer et I. J. Yule, « Coherence of a packed bed under lateral oscillation », *Powder technology*, vol. 171, n°. 3, p. 154–156, 2007.
- [84] R. Condotta, « Coulabilité des poudres cohésives : mesures aux faibles contraintes, granulaires humides et application à une poudre industrielle », INP Toulouse, 2005.
- [85] S. S. Hsiau, P. C. Wang, et C. H. Tai, « Convection cells and segregation in a vibrated granular bed », *AIChE Journal*, vol. 48, n°. 7, 2002.
- [86] N. Vandewalle, G. Lumay, O. Gerasimov, et F. Ludewig, « The influence of grain shape, friction and cohesion on granular compaction dynamics », *The European Physical Journal E: Soft Matter And Biological Physics*, vol. 22, n°. 3, p. 241–248, 2007.
- [87] J. Debayle, A. Raihane, A. Belhaoua, O. Bonnefoy, G. Thomas, J. M. Chaix, et J. C. Pinoli, « Velocity field computation in vibrated granular media using an optical flow based multiscale image analysis method », *Image Analysis and Stereology*, vol. 28, p. 35–43, 2009.
- [88] B. D. Lucas, T. Kanade, et others, « An iterative image registration technique with an application to stereo vision », in *International joint conference on artificial intelligence*, 1981, vol. 3, p. 674–679.
- [89] J. Bouguet, « Pyramidal implementation of the Lucas Kanade feature tracker », *Intel Corporation, Microprocessor Research Labs*, 2000.
- [90] L. A. Feldkamp, L. C. Davis, et J. W. Kress, « Practical cone-beam algorithm », *J. Opt. Soc. Am. A*, vol. 1, n°. 6, p. 612–619, juin 1984.
- [91] H. Gercek, « Poisson's ratio values for rocks », *International Journal of Rock Mechanics and Mining Sciences*, vol. 44, n°. 1, p. 1–13, 2007.
- [92] A. Anand, J. S. Curtis, C. R. Wassgren, B. C. Hancock, et W. R. Ketterhagen, « Predicting discharge dynamics from a rectangular hopper using the discrete element method (DEM) », *Chemical Engineering Science*, vol. 63, n°. 24, p. 5821–5830, 2008.
- [93] M. Müller, S. Luding, et H. Herrmann, « Simulations of vibrated granular media in 2D and 3D », in *Friction, Arching and Contact Dynamics*, 1997.
- [94] R. C. Flemmer et I. J. Yule, « Coherence of a packed bed under lateral oscillation »,

*Powder Technology*, vol. 171, n° 3, p. 154–156, 2007.

[95] R. Lefèvre, « Graissage et tribotechnique, Tome 1 Lubrifiants et processus de graissage », Technip., tome 1, p. 173–212, 1978.



# Nomenclature

## Caractères Latin

Symbole	Désignation	Dimension	Unité (MKSA)	Autre unité
$A_g$	Aire de la surface d'un grain	$L^2$	$m^2$	-
$Ba$	Nombre de Bagnold	-	-	-
$c_i$	Coefficient d'amortissement	$MT^{-1}$	$kg.s^{-1}$	-
$c_{crit}$	Coefficient d'amortissement critique	$MT^{-1}$	$kg.s^{-1}$	-
$c_i$	Coefficient de frottement du système vibré i		$N.s.m^{-1}$	$N.s.m^{-1}$
$C$	Coefficient de cohésion	-	-	-
$C$	Densité ou compacité du sable	-	-	-
$C_B$	Densité ou compacité dans la boîte	-	-	-
$C_{RLP}$	Densité : random loose packing	-	-	-
$C_{RCP}$	Densité : random close packing	-	-	-
$d_g$	Diamètre d'un grain	$L$	$m$	-
$d_{trou}$	Diamètre du trou d'écoulement	$L$	$m$	-
$e$	Indice des vides	-	-	-
$E$	Energie	$ML^2T^{-2}$	$kg.m^2.s^{-2}$	$J$
$E$	Module d'Young	$ML^{-1}T^{-2}$	$kg.m^{-1}.s^{-2}$	$Pa$
$f$	fréquence	$T^{-1}$	$s^{-1}$	$Hz$
$f$	Force délivrée par le pot vibrant	$MLT^{-2}$	$kg.m.s^{-2}$	$N$
$f_1$	Force délivrée dans le modèle 1	$MLT^{-2}$	$kg.m.s^{-2}$	$N$
$f_2$	Force délivrée dans le modèle 2	$MLT^{-2}$	$kg.m.s^{-2}$	$N$
$f_3$	Force délivrée dans le modèle 3	$MLT^{-2}$	$kg.m.s^{-2}$	$N$
$F_n$	Force normale	$MLT^{-2}$	$kg.m.s^{-2}$	$N$
$F_s$	Force tangentielle	$MLT^{-2}$	$kg.m.s^{-2}$	$N$
$g$	Accélération de la pesanteur	$LT^{-2}$	$ms^{-2}$	
$G$	Coefficient de cisaillement	$ML^{-1}T^{-2}$	$kg.m^{-1}.s^{-2}$	$Pa$
$H_{ini}$	Hauteur initiale de sable	$L$	$m$	-
$H_g$	Hauteur de grain	$L$	$m$	-
$I$	Nombre d'inertie	-	-	-
$k_b$	Constante de Boltzman	$ML^2T^{-2}\theta^{-1}$	$1,38.10^{-23}$ $kg.m^2.s^{-2}.K^{-1}$	$J.K^{-1}$
$k_n$	Rigidité normale	$MT^{-2}$ (modèle linéaire)	$kg.s^{-2}$	$N.m^{-1}$
$k_s$	Rigidité tangentielle	$MT^{-2}$ (modèle linéaire)	$kg.s^{-2}$	$N.m^{-1}$
$L_x$	Longueur de la boîte	$L$	$m$	-
$L_y$	Profondeur de la boîte	$L$	$m$	-
$L_z$	Hauteur de la boîte	$L$	$m$	-

Symbole	Désignation	Dimension	Unité (MKSA)	Autre unité
$M$	Indice de mélange	-	-	-
$M_{app}$	Masse apparente	$M$	$kg$	-
$M_{boite}$	Masse de la boîte vibrée	$M$	$kg$	-
$M_{plateau}$	Masse du plateau vibré	$M$	$kg$	-
$M_{sable}$	Masse de sable viré	$M$	$kg$	-
$N_g$	Nombre de grains simulé	-	-	-
$P$	Niveau de pyramide	-	-	-
$P_{diss}$	Puissance dissipée	$ML^2T^{-3}$	$kg.m^2.s^{-3} (J.s^{-1})$	$W$
$P_{inst}$	Puissance dissipée instantannée	$ML^2T^{-3}$	$kg.m^2.s^{-3} (J.s^{-1})$	$W$
$q$	Débit d'écoulement ou flux massique	$[M.T^{-1}]$	$g.s^{-1}$	-
$r$	Coordonnée sphérique dans le grain	$L$	$m$	-
$r_g$	Rayon d'un grain	$L$	$m$	-
$R_B$	Taux de remplissage de la boîte	-	-	-
$S$	Indice de Ségrégation	-	-	-
$S_g$	Surface d'un grain	$L^2$	$m^2$	-
$S_{trou}$	Surface du trou d'écoulement	$L^2$	$m^2$	-
$T$	Température	$\theta$	$K$	-
$T_g$	Température granulaire	$L^2T^{-2}$	$m^2.s^{-2}$	-
$T$	Période de vibration	$T$	$s$	-
$St$	Nombre de Stokes	-	-	-
$\vec{U}(i,j,k,t)$	Vitesse à l'instant t dans le voxel (i,j,k) de la grille de calcul	$LT^{-1}$	$m.s^{-1}$	-
$\vec{v}(n,t)$	Vitesse du grain n	$LT^{-1}$	$m.s^{-1}$	-
$V_B$	Volume de la boîte	$L^3$	$m^3$	-
$V_g$	Volume d'un grain	$L^3$	$m^3$	-
$V_{total}$	Volume apparent	$L^3$	$m^3$	-
$V_p$	Volume poreux	$L^3$	$m^3$	-
$V_{solide}$	Volume occupé par les grains	$L^3$	$m^3$	-
$W$	Largeur de la fenêtre de visualisation (exp)	$L$	$m$	-
$\vec{x}(n,t)$	Position du grain n	$L$	$m$	-
$x$	Position de la boîte vibrée	$L$	$m$	-
$x_c$	Position du chariot vibré dans le modèle 3	$L$	$m$	-

## Caractères Grecs

Symbole	Désignation	Dimension	Unité (MKSA)	Autre unité
$\beta_i$	Coefficient d'amortissement	-	-	-
$\Gamma$	Accélération maximale adimensionnée par la pesanteur	-	-	-
$\delta$	Distance d'interpénétration des particules	$L$	$m$	-
$\Delta t$	Pas de temps numérique	$T$	$s$	-
$\varepsilon$	Porosité	-	-	-
$\xi$	Arrondi (forme des grains)	$L^{-2}$	$m^{-2}$	-
$\eta$	Viscosité	$ML^{-1}T^{-1}$	$kg.m^{-1}.s^{-1}$	$Pa.s$
$\theta$	Angle de talus	-	$rad$	-
$\theta$	Coordonnée sphérique	-	-	-
$\kappa_A$	Coefficient de pression active de Rankine	-	-	-
$\kappa_P$	Coefficient de pression passive de Rankine	-	-	-
$\mu_{g/g}$	Coefficient de friction inter grains	-	-	-
$\mu_{g/m}$	Coefficient de friction grain/mur	-	-	-
$\mu_s$	Coefficient de friction statique	-	-	-
$\rho_g$	Densité des grains	$ML^{-3}$	$kg.m^{-3}$	-
$\sigma$	Tenseur des contraintes	$ML^{-1}T^{-2}$	$kg.m^{-1}.s^{-2}$	$Pa$
$\sigma_i$	Contrainte normale sur la face indicée i	$ML^{-1}T^{-2}$	$kg.m^{-1}.s^{-2}$	$Pa$
$\tau_i$	Contrainte tangentielle sur la face indicée i	$ML^{-1}T^{-2}$	$kg.m^{-1}.s^{-2}$	$Pa$
$\nu$	Coefficient de poisson	-	-	-
$\varphi$	Coordonnée sphérique	-	-	-
$\Psi$	Sphéricité	-	-	-
$\omega$	Pulsation	$T^{-1}$	$s^{-1}$	$Hz$





# Table des figures

Figure 1. Exemple de fusible électrique, Mersen Fusible carré NH pour semi-conducteur, Class aR 500 - 700 V AC, 16 - 1000 A   Protistor® et représentation schématique du fusible.....	1
Figure 2. Ensableuses industrielles. Des chocs sont imposés à une fréquence de 50 Hz pendant que le sable est introduit par le dessus de la boîte fusible.....	2
Figure 3. Rosace d'Apollonius ( <a href="http://numb3rs.wolfram.com/">http://numb3rs.wolfram.com/</a> ).....	8
Figure 4. Simplification de Powers [14] permettant d'évaluer l'arrondi de grains .....	12
Figure 5. Définition classique d'une contrainte et de la force élémentaire s'exerçant sur un élément de surface dS d'aire dA .....	16
Figure 6. Tétraèdre de Cauchy et contraintes s'exerçant sur trois plans perpendiculaires	17
Figure 7. Représentation des contraintes dans un espace 2D (profondeur unité selon $\vec{Oz}$ ) .....	20
Figure 8. Représentation des contraintes sous forme de cercle de Mohr.....	23
Figure 9. Critère de Mohr-Coulomb en fonction de l'angle de friction statique $\mu_s$ .....	24
Figure 10. Représentation schématique des notations utilisées pour calculer l'équation de Janssen .....	25
Figure 11. Schéma illustratif. Ségrégation radiale : s'opère à partir de quelques tours de tambour. Ségrégation axiale : existe s'il y a une différence de coefficient de friction entre les particules, peut nécessiter des milliers de tours de tambour. Image extraite de [29] ...	28
Figure 12. Images extraites de [31]. A gauche : illustration des phénomènes s'opérant lors d'un déversement à tas. A droite : photographie de la ségrégation observée dans un sablier (Photographie Stéphane Bourlès, GMCM) .....	28
Figure 13. Représentation schématique des tendances en fonction de la fréquence f et de l'accélération $\Gamma$ délivrées. Informations extraites de [35] pour un mélange de grains de cuivre de 0,25 mm et de verre de 0,12 mm soumis à des oscillations sinusoïdales verticales .....	30
Figure 14. Critère d'écoulement pour le dispositif « Flodex ». Le poids de la colonne de sable doit être supérieur à la force de friction exercée sur celle-ci.....	33
Figure 15. Diagramme d'état d'un milieu granulaire suivant trois variables, la température granulaire, la contrainte appliquée et l'inverse de la densité. A gauche, Liu [40]. A droite, Silbert [41] .....	33
Figure 16. Test classique de cisaillement : un mélange matériau granulaire/fluide est disposé entre deux plaques parallèles, l'une fixe, l'autre mobile à une vitesse constante $V_0$ entraînant les grains en son contact. Le taux de cisaillement est défini comme le rapport entre la vitesse $V_0$ de la plaque mobile et la distance entre les plaques : $\dot{\gamma} \equiv \frac{V_0}{h}$ .....	37
Figure 17. Distance d'interpénétration $\delta$ entre 2 particules .....	42
Figure 18. Cycles de calcul dans la méthode DEM .....	42
Figure 19. Représentation schématique des forces d'interaction entre une particule (bille) et une autre particule (bille) ou bien une paroi (mur) dans la méthode DEM, avec patin ( $f_\mu$ ), ressorts ( $k_n$ , $k_s$ ), et amortisseurs ( $c_n$ , $c_s$ ) .....	43
Figure 20. A gauche la représentation schématique d'une interpénétration. A droite, l'approximation du volume de contact à un cylindre de rayon $\alpha r_g$ et de longueur $2 r_g$ ....	44
Figure 21. Automate cellulaire : réseau a) et règles de collisions b) c) (extraits de [64]) .	50

Figure 22. Représentation schématique du milieu granulaire vibré horizontalement (Raihan [65]). Pour faciliter la description des phénomènes rencontrés, les différentes faces sont dénommées selon les quatre points cardinaux (vibrations dans le sens Nord/Sud).....	54
Figure 23. Dispositif expérimental des expériences de Chicago : un courant d'azote, au début d'expérience, permet d'obtenir une densité initiale faible. Le tube rempli de grains (à droite du montage) est ensuite vibré verticalement. Les densités sont mesurées de manière indirecte en observant la capacité diélectrique du milieu granulaire [10] .....	54
Figure 24. Sous l'effet d'une faible sollicitation, un grain peut passer d'une énergie potentielle $V_A$ à une configuration énergétique plus faible $V_B$ . Les effets de chaque déplacement de grain s'additionnant, cela conduit à une densification globale .....	55
Figure 25. A gauche, vibrations horizontales, champ de vitesse visualisé sur la face Est. $\Gamma=4.2$ , $f=50$ Hz [72]. A droite, vibrations verticales, $\Gamma=3$ , $f=11$ Hz [73], Vitesses typiques de convection dans les deux situations : $0-30 \text{ mm.s}^{-1}$ .....	58
Figure 26. Schéma illustrant l'apparition des rouleaux de convection en vibration horizontale pour $\Gamma>1$ .....	58
Figure 27. Phénoménologie de sable vibré (silice, diamètre des grains $d_g \approx 0,5 \text{ mm}$ ) en fonction de la fréquence et de l'accélération. $L_x=40 \text{ mm}$ , $L_y=80 \text{ mm}$ . Losanges : frémissement de surface. Carrés : transition vers l'écoulement. Triangles : apparition de motifs à la surface libre. Cercles : motif dromadaire à la surface libre. Diagramme extrait de [49] .....	59
Figure 28. Evolution de la densité en fonction du nombre de sollicitations imposé (chocs verticaux), échelle logarithmique. [65] .....	61
Figure 29. Evolution temporelle de la hauteur de l'empilement contre la face Nord d'un empilement vibré à 50 Hz et $\Gamma=4,4$ . Boite de $80 \text{ mm} \times 40 \text{ mm}$ [49] .....	61
Figure 30. Evolution temporelle de la vitesse des grains en face Nord pour un empilement vibré à 50 Hz, $\Gamma=3,5$ . [49] .....	62
Figure 31. Représentation schématique du dispositif expérimental utilisé dans [75] .....	63
Figure 32. Variation de la puissance dissipée en fonction de l'accélération. Résultats expérimentaux (courbe du bas) pour trois tailles de diamètre de cylindre différentes (30, 40, 80 mm de diamètre) et simulés (courbe du haut) pour 2 tailles (40 mm et 80 mm). Billes de verre dans l'expérience, sphères dures en modélisation. $d_g=425-600 \mu\text{m}$ .....	66
Figure 33. Taux de dissipation d'énergie pour différentes accélérations en fonction du déplacement de la base vibrée. Résultats expérimentaux pour des billes de verres (425-600 $\mu\text{m}$ ). 10 couches de grains de profondeur à 500 Hz pour un récipient cylindrique d'un diamètre de 84 mm .....	66
Figure 34. Taux de dissipation d'énergie pour différentes accélérations en fonction du déplacement de la base vibrée. Résultats de simulations DEM pour des grains durs, profondeur de 10 couches de grains, $f=500 \text{ Hz}$ , récipient cylindrique de diamètre 84 mm .....	67
Figure 35. Modélisation de la force s'exerçant sur la paroi du fond. Sphères dures de $800 \mu\text{m}$ ; 10 couches de grains. $f=500 \text{ Hz}$ et $a=20 \text{ m.s}^{-2}$ (a) Grande échelle de force, et (b) Zoom sur une échelle de force plus restreinte .....	67
Figure 36. Dimensions intérieures du récipient contenant le milieu granulaire considéré dans [49] .....	70
Figure 37. Influence de $\Gamma$ sur la vitesse en face Nord en fonction de la hauteur $z$ dans l'empilement pour une hauteur initiale de 20 mm [49] .....	70
Figure 38. Vitesse maximale en face Nord en fonction de l'accélération délivrée (tracé à partir d'informations extraites de [49]) .....	71

Figure 39 Evolution de l'épaisseur fluidisée $E_f$ avec $\Gamma$ calculée avec une vitesse critique $v_c=0,18. \text{ mm s}^{-1}$ pour deux empilements vibrés respectivement à 50 et 85 Hz. [49].....	71
Figure 40. Diagramme fréquence/accélération de la densité relaxée d'un sable soumis à des vibrations verticales dans un récipient cylindrique. Diamètre moyen des grains $\langle d_g \rangle = 660 \mu\text{m}$ . Diamètre du cylindre $D=28 \text{ mm}$ . Hauteur initiale de sable $H_{ini}=30 \text{ mm}$ [36].....	73
Figure 41. Evolution de la densité en vibrations verticales suite à une variation progressive de l'accélération $\Gamma$ . $10^5$ sollicitations ont été imposées pour déterminer chaque point. Billes de verre de 2 mm. Diamètre du cylindre : $D=18 \text{ mm}$ . Hauteur initiale de sable $H_{ini}=830 \text{ mm}$ [78].....	73
Figure 42. Variation de la densité en fonction de l'altitude Top : $z=32 \text{ mm}$ . Middle : $z=49 \text{ mm}$ . Bottom : $z=68 \text{ mm}$ [78] .....	74
Figure 43 Profil de densité en fonction de l'altitude pour un milieu granulaire vibré verticalement et pour différentes valeurs de $\Gamma$ . Echantillons cylindriques d'une hauteur de 14 mm et d'un diamètre de 13 mm. (bas : $z \approx 3,5 \text{ mm}$ , milieu : $z \approx 7 \text{ mm}$ , haut : $z \approx 10,5 \text{ mm}$ ) .....	74
Figure 44 Evolution de la densité en fonction de $\Gamma$ pour un milieu granulaire initial lâche ( $C_{ini} \approx 61,5 \%$ ). Sont présentées la densité initiale (i), vibrée (v) et relaxées (r). $H_{ini}=60 \text{ mm}$ , $L_x=40 \text{ mm}$ , $L_y=80 \text{ mm}$ . [49] .....	76
Figure 45 Evolution de la compacité vibrée $C_{vib}$ en vibrations horizontales suite à une variation progressive de l'accélération $\Gamma$ . Chaque point a été déterminé en régime stationnaire pendant vibrations. $f=50 \text{ Hz}$ . $H_{ini}=60 \text{ mm}$ , $L_x=40 \text{ mm}$ , $L_y=80 \text{ mm}$ [49].....	76
Figure 46. Diagramme des compacités relaxées en fonction de l'accélération délivrée et de l'altitude $z$ considérée. Zone I-a : zone inférieure solide, $C=C_{ini}$ (entre 61 et 68 % selon le protocole de remplissage) Zone I-b : zone intermédiaire solide ( $C \approx 67-68 \%$ ) Zone II : zone supérieure fluidisée ( $C < 64 \%$ ).....	77
Figure 47 Cellules de convections obtenues en simulant des vibrations verticales pour 2 tailles de récipient ( a) $L/d=100$ avec 700 grains et b) $L/d=100$ avec 1200 grains ), $\Gamma=4$ [81].....	78
Figure 48. Représentation schématique d'une boîte à base carrée contenant un milieu granulaire et soumise à une accélération horizontale .....	80
Figure 49. Evolution de la vitesse en face Nord en fonction de la hauteur initiale pour $\Gamma=5.1$ et $f=50 \text{ Hz}$ (tracé à partir d'informations extraites de [49]) .....	81
Figure 50. Variation de l'épaisseur fluidisée $E_F$ en fonction de $\Gamma$ . $E_F$ est calculée pour une vitesse critique $v_c=0.18 \text{ mm.s}^{-1}$ pour des empilements de hauteur initiale $H_{ini}$ variables mais de même densité initiale $C_i \approx 60 \%$ vibrés à une fréquence de 50 Hz [49] .....	81
Figure 51. Influence du type de sable sur l'épaisseur fluidisée. Sable 2 : $d_g=517 \mu\text{m}$ , arrondi <sup>1</sup> . Sable 4 : $d_g=393 \mu\text{m}$ , peu anguleux <sup>1</sup> [49] .....	82
Figure 52. Influence de la rugosité des parois sur les cellules de convection et la vitesse de déplacement des grains dans la cellule de convection. Coefficient de friction statique entre mur et grains $\mu_{g/m}$ : (a) : $\mu_{g/m}=0,15$ , (b) : $\mu_{g/m}=0,55$ , (c) : $\mu_{g/m}=0,68$ [85] .....	83
Figure 53. Représentation schématique du banc de vibration utilisé [49] .....	92
Figure 54. Montage expérimental .....	92
Figure 55. Représentation schématique de la boîte de référence vibrée et de ses dimensions caractéristiques (dimensions intérieures : $L_x=40 \text{ mm}$ , $L_y=80 \text{ mm}$ et $L_z=80 \text{ mm}$ ) .....	93
Figure 56. Représentation schématique du principe de l'imagerie confocale chromatique ( <a href="http://www.stilsa.com">http://www.stilsa.com</a> ).....	97

Figure 57. Exemple de profil d'altitude obtenu pour une boîte de dimensions $L_x=100$ mm, $L_y=40$ mm, et une hauteur initiale de sable $H_{ini}=60$ mm après vibration à $\Gamma=3$ , $f=50$ Hz. On constate un tassement global après vibration par rapport à l'état initial et la formation d'un dôme .....	97
Figure 58. Représentation générale du fonctionnement du tomographe à rayons X .....	98
Figure 59. Analyse par diffraction X du sable référencé sable 2. L'analyse révèle que le sable est constitué principalement de silice « quartz alpha » .....	99
Figure 60. Images prises au microscope électronique à balayage. A gauche, grossissement de 33, à droite, grossissement de 110. En dessous, rappel de l'échelle de Powers [14]..	100
Figure 61. Distribution granulométrique en nombre du sable référencé sable2. Interpolation gaussienne centrée en $x=508$ $\mu\text{m}$ avec un écart type $\sigma$ de 122 $\mu\text{m}$ . Interpolation « skew normal » centrée en $\xi=370$ $\mu\text{m}$ de dispersion statistique $\omega=216$ $\mu\text{m}$ et de travers (skewness) $\alpha=3,6$ $\mu\text{m}$ .....	101
Figure 62. Cellule de cisaillement du rhéomètre à poudres FT4 et mesure obtenue sur sable référencé sable 2 .....	102
Figure 63. Schéma du dispositif pseudo 3D utilisé pour mesurer l'angle de talus .....	104
Figure 64. Mesure des angles de talus. Angle de talus $\theta_t=37,5^\circ$ .....	104
Figure 65. Repérage temporel .....	108
Figure 66. Représentation de l'espace maillé et des indices utilisés. A gauche, représentation 2D (face Est). A droite, représentation 3D .....	108
Figure 67. Rappel des notations sur l'orientation d'une boîte vibrée .....	109
Figure 68. Représentation schématique de la discrétisation des grains .....	111
Figure 69. Représentation en coordonnées sphériques des points de l'espace au niveau d'un grain .....	112
Figure 70. Test de l'algorithme de discrétisation des grains avec 150 divisions sur chaque variable de l'espace ( $r, \theta, \phi$ ). La grille de calcul est formée d'un cube de 10 mm de côté dont chaque côté est divisé en 40 intervalles .....	113
Figure 71. Représentation schématique du déplacement de quelques grains .....	115
Figure 72. Préparation d'un milieu granulaire : génération aléatoire de grains puis dépôt par gravité. Ici, $L_x=60$ mm, nombre de grains $N_g=12000$ conduisant à une hauteur de sable d'environ 120 mm .....	121
Figure 73. Evolution de la moyenne des forces non contre-balancées ( $\times 10^{-4}$ Newtons) en fonction du temps ( $\times 10^{-1}$ s). Au bout d'une demi-seconde, on estime que le milieu granulaire a atteint un état stable .....	121
Figure 74. Représentation schématique d'une boîte périodique dans la méthode des éléments discrets .....	123
Figure 75. Influence de la taille de la cellule périodique sur le profil de vitesse sur la face Nord. $f=50$ Hz, $\Gamma=3$ , $L_x=40$ mm, $H_{ini}=30$ mm, $\langle d_g \rangle=1$ mm .....	124
Figure 76. Influence de la largeur de la cellule périodique sur la vitesse maximale en face Nord, $f=50$ Hz, $\Gamma=3$ , $L_x=40$ mm, $H_{ini}=30$ mm .....	124
Figure 77. Champ de vitesse constaté face Est pour des grains de diamètre moyen $\langle d_g \rangle=0,5$ mm, à gauche : résultats de simulation, à droite, résultats expérimentaux. $L_x=20$ mm, $L_y=20$ mm (non périodique), hauteur initiale de sable $H_{ini}=20$ mm. $d_g \approx 0,5$ mm. $f=50$ Hz, $\Gamma=3$ .....	125
Figure 78. Comparaison des vitesses en face Nord pour des boîtes de même dimensions $L_x=20$ mm, $L_y=20$ mm et une même hauteur de sable $H_{ini}=20$ mm. En expérience et simulation pour des grains de diamètre moyens 0,5 et 1 mm .....	126
Figure 79. Comparaison des profils de vitesse expérimental et simulé en face Nord pour des billes en silice poreuse (dans l'expérience) de diamètre $\langle d_g \rangle=2$ mm et de densité	

$\rho=1,25$ , $L_x=40$ mm, $L_y=40$ mm (non périodique) et une hauteur initiale de sable $H_{ini}=40$ mm .....	127
Figure 80. Principe du dispositif 3D utilisé pour mesurer l'angle de talus (dynamique) .....	128
Figure 81. Photographie du dispositif MPA permettant la mesure d'un angle de talus « dynamique ». La partie supérieure gauche de la boîte est retirée brutalement afin de laisser le talus supérieur droit se former. Angle de talus dynamique obtenu : $\theta'_t = 30^\circ \pm 1^\circ$ .....	128
Figure 82. Angle de talus obtenus en simulation après suppression du mur gauche pour $L_x=40$ mm, $L_y=10$ mm (périodique) avec une hauteur initiale de sable $H_{ini}=40$ mm et un diamètre moyen de grain $\langle d_g \rangle \approx 1$ mm. $\mu_t = \tan \theta'_m$ .....	130
Figure 83. Evolution de l'angle de talus numérique en fonction du coefficient de friction $\mu_{g/g}$ . (méthode MPA) Rappel : angle de talus « dynamique » obtenu expérimentalement de $30^\circ$ .....	130
Figure 84. Schémas des différentes boîtes utilisées .....	135
Figure 85. Représentation schématique des accélérations (en bleu), vitesses (en rouge) et positions (en vert) de la boîte vibrée. A $t=kT$ (où $T$ est la période de vibration), la boîte est à mi-parcours entre les deux positions de butée et vient de subir une accélération de gauche à droite le demi-cycle de vibration qui précède .....	137
Figure 86. Milieu granulaire accéléré de gauche à droite, un espace de faible densité est créé de manière intermittente le long des parois Nord/Sud. Mesure de compacité effectuée en régime stationnaire quand la boîte est à mi-parcours entre les deux positions extrêmes .....	137
Figure 87. Evolution de la vitesse du centre de gravité de l'ensemble du milieu granulaire au cours des 20 premières secondes. Au bout d'une seconde, la vitesse de compaction devient 20 fois plus faible que la vitesse de compaction initiale. Au bout de 6 secondes, il n'y a plus aucune compaction et la vitesse du centre de gravité fluctue autour de 0. A droite, même graphique avec un tracé sur une échelle plus fine .....	139
Figure 88. Division du milieu granulaire en zones. Pour exemple, $d_{IV,VI}$ caractérise le flux de grain de la zone IV vers la zone VI. $\Gamma=3$ , $f=50$ Hz, $L_y=10$ mm, $L_x=60$ mm, $H_{sable} \approx 50$ mm. Projection en face Est .....	140
Figure 89. Cartographie des débits moyens en régime stationnaire (en $\text{mm}^3 \cdot \text{s}^{-1}$ ). En bleu, valeur des débits. En rouge, bilan des flux entrants et sortants. La moyenne a été réalisée en régime stationnaire sur les cycles 300 à 700 pour $\Gamma=3$ et $f=50$ Hz. Projection en face Est .....	141
Figure 90. Profil de vitesse expérimentale et numérique en face Nord en fonction de $\Gamma$ pour $f=50$ Hz et $L_x=40$ mm, $L_y=80$ mm en expérience et $L_y=10$ mm périodique en simulation .....	143
Figure 91. Evolution de la vitesse maximale en face Nord en fonction de $\Gamma$ , résultats expérimentaux et numériques .....	143
Figure 92. Evolution la compacité numérique (%) à l'état relaxé en fonction de l'altitude dans la boîte vibrée et $\Gamma$ .....	144
Figure 93. Mesure de la compacité locale en fonction de l'accélération effectuée à l'aide du microtomographe Nanotom de Phoenix Xray. Vue face Est. $f=50$ Hz .....	145
Figure 94. Profil de vitesse de chute en face Nord en fonction de la fréquence pour $\Gamma=3$ .....	146
Figure 95. Profil de compacité pour les fréquences 20 Hz, 50 Hz, 100 Hz, 200 Hz avec $\Gamma=3$ .....	148
Figure 96. Résultats expérimentaux et numériques: influence de la taille $L_x$ de la boîte sur les profils de vitesses en face Nord .....	150

Figure 97. Diagramme des compacités relaxées en fonction de la longueur $L_x$ de la boîte et de l'altitude $z$ . $f=50$ Hz et $\Gamma=3$ , étude numérique .....	150
Figure 98. Influence des coefficients de friction inter grains $\mu_{g/g}$ et entre grain et mur $\mu_{g/m}$ sur la vitesse maximale en face Nord pour respectivement $\mu_{g/m}=0,5$ et $\mu_{g/g}=0,5$ fixés... 151	151
Figure 99. Inversion des rouleaux de convection observée quand $\mu_{g/g}=0,1$ et $\mu_{g/m}=0,5$ . 152	152
Figure 100. Etude numérique de l'influence du coefficient de friction inter-grains sur la compacité globale de l'empilement numérique finale et initiale (pour $\mu_{m/g}=0,5$ ) .....	153
Figure 101. Chaînes de forces dans un empilement granulaire 2D. $L_x=60$ mm, $H=40$ mm. Distribution uniforme avec $2\text{ mm}<d_g<3\text{ mm}$ .....	154
Figure 102. Vitesses moyennes en face Nord constatées sur les cycles 90 à 100 pour des accélérations adimensionnées allant de $\Gamma=0,5$ à $\Gamma=5$ . Critère pour considérer que la vitesse est nulle : $V_z<0,02\text{ mm s}^{-1}$ .....	157
Figure 103. Champs de vitesses instantanées à $f=50$ Hz. La boîte vibrée se déplace de gauche à droite et la mesure de vitesse s'effectue à pleine vitesse à mi-parcours entre les deux positions de butée(soit d'après les notations introduites en (V-2), en $t_{100,2}$ avec $N_1=2$ ). On observe une inversion du sens de déplacement des grains pour une altitude $z=51\text{ mm}$ , $41\text{ mm}$ , $32\text{ mm}$ , $21\text{ mm}$ , pour $\Gamma=0,5$ ; $1,5$ ; $3$ et $5$ respectivement .....	158
Figure 104. Ensemble des cercles de Mohr observés à différentes altitudes pour l'état statique: pas de glissement. Vers la gauche, partie supérieure de l'empilement granulaire. Vers la droite, fond de l'empilement granulaire. ....	161
Figure 105. Représentation non adimensionnée de l'état des contraintes en milieu statique. Tenseur de contraintes moyennes (a), rayons des cercles de Mohr (b) et distance à la droite de Coulomb (c) .....	161
Figure 106. Etat statique. Tenseur des contraintes moyens (a), rayons des cercles de Mohr adimensionnés (b) et distance à la droite de Coulomb adimensionnée (c) .....	161
Figure 107. Compacité du milieu granulaire en fonction de l'altitude $z$ dans le cas statique .....	162
Figure 108 $\Gamma=0,5$ . Tenseur des contraintes moyens (a), rayons des cercles de Mohr adimensionnés (b) et distance à la droite de Coulomb adimensionnée (c) .....	163
Figure 109. Ensemble des cercles de Mohr observés à différentes altitudes pour $\Gamma=0,5$ . Vers la gauche, partie supérieure de l'empilement granulaire. Vers la droite, fond de l'empilement granulaire. ....	164
Figure 110. $\Gamma=1,5$ . Tenseur des contraintes moyens (a), rayons des cercles de Mohr adimensionnés (b) et distance à la droite de Coulomb adimensionnée (c) .....	164
Figure 111 Ensemble des cercles de Mohr observés à différentes altitudes pour $\Gamma=1,5$ . Vers la gauche, partie supérieure de l'empilement granulaire. Vers la droite, il n'y a pas forcément correspondance entre la position des cercles et la profondeur .....	164
Figure 112. $\Gamma=3$ . Tenseur des contraintes moyens (a), rayons des cercles de Mohr adimensionnés (b) et distance à la droite de Coulomb adimensionnée (c) .....	165
Figure 113. Ensemble des cercles de Mohr observés à différentes altitudes pour $\Gamma=3$ . Vers la gauche, partie supérieure de l'empilement granulaire. Vers la droite, il n'y a pas forcément correspondance entre la position des cercles et la profondeur .....	165
Figure 114. $\Gamma=5$ . Tenseur des contraintes moyens (a), rayons des cercles de Mohr adimensionnés (b) et distance à la droite de Coulomb adimensionnée (c) .....	165
Figure 115 Ensemble des cercles de Mohr observés à différentes altitudes pour $\Gamma=5$ . Vers la gauche, partie supérieure de l'empilement granulaire. Vers la droite, il n'y a pas forcément correspondance entre la position des cercles et la profondeur .....	166
Figure 116. Cartographie des rayons moyens à l'état initial et après 18 secondes de vibrations.....	167

Figure 117. Profil des rayons moyens en fonction de la largeur et de l'altitude .....	168
Figure 118. Vue en coupe du sable contenu dans un fusible MERSEN. Le fusible céramique est parallélépipédique de base carrée de côté 60 mm. Les lames d'argent ont été rabattues à plat sur le sable afin de faciliter leur visualisation.....	168
Figure 119. Photo de la boîte utilisé pour caractériser l'influence de l'aire de la surface d'écoulement et des capuchons de sorties interchangeables.....	169
Figure 120. Représentation schématique de la boîte percée utilisée pour caractériser les écoulements de grains .....	171
Figure 121. Variation du débit en face Est en fonction du diamètre d'entrée de l'orifice. À droite, échelle logarithmique .....	171
Figure 122. Variation du débit en face Nord en fonction du diamètre d'entrée de l'orifice. À droite, échelle logarithmique.....	172
Figure 123. Représentation schématique de la boîte utilisée pour caractériser les écoulements de grains en surface. Trois trous de 1,5 mm positionnés sur la face Est et un trou situé sur la face Nord au centre de la boîte à 5 mm du fond de la boîte. Remarquons que les trous sont de forme conique afin d'éviter les phénomènes de blocage lors de l'écoulement de grains .....	173
Figure 124. Influence de l'accélération sur les débits en fonction de la position du trou sur la face Est pour des diamètres de trou de 1.5 mm et une fréquence $f=50$ Hz. Erreur de mesure : $\pm 20\%$ . Échelles de débit en $g\ s^{-1}$ .....	175
Figure 125. Influence de l'accélération sur le débit pour différentes altitudes.....	176
Figure 126. Influence de l'altitude sur les débits au centre de la face Nord en fonction de l'accélération pour une fréquence $f=50$ Hz.....	176
Figure 127. Influence de la fréquence sur les débits en fonction de la position du trou sur la face Est pour des diamètres de trou de 1,5 mm et pour une accélération adimensionnée $\Gamma=3$ . Incertitude de mesure : $\pm 20\%$ .....	177
Figure 128. Influence de la fréquence sur le débit pour différentes altitudes en face Est.....	178
Figure 129. Influence de l'altitude sur les débits au centre de la face Nord en fonction de la fréquence pour une accélération adimensionnée $\Gamma=3$ .....	178
Figure 130. Dispositif expérimental classique: ajout d'un capteur de force, d'un accéléromètre, d'un toit et d'un système d'alimentation en sable. Un deuxième dispositif où des solides massifs sont collés sur le plateau est utilisé pour étalonnage des résultats .....	182
Figure 131. Schéma de la boîte parallélépipédique en plexiglas utilisée lors du remplissage avec un toit. Vue face Est. Deux configurations sont étudiées, l'une où l'entonnoir est centré, l'autre où il est situé à 5 mm des parois latérales .....	183
Figure 132. Test de remplissage, par le côté du couvercle à 5 mm de chaque bord et par le centre du couvercle. $f=50$ Hz, $\Gamma=3$ .....	184
Figure 133. Temps de remplissage en fonction de l'accélération adimensionnée délivrée .....	185
Figure 134. Aspect de l'empilement à la fin du remplissage en fonction de $\Gamma$ , $f=50$ Hz .....	187
Figure 135. Evolution du taux de remplissage maximal de la boîte $R_{Bmax}$ en fonction de l'accélération délivrée. Remplissage par le côté. Incertitude estimée: $\pm 0,05\%$ .....	188
Figure 136. Masse apparente constatée à $\Gamma=3$ . Expériences réalisées pour des solides massifs étalons et un remplissage granulaire avec un toit. $f=50$ Hz .....	194
Figure 137. Masse apparente moyenne constatée à $\Gamma=5$ . Expériences réalisées pour des solides massifs étalons et un remplissage granulaire avec un toit. $f=50$ Hz .....	194
Figure 138. Masse apparente moyenne constatée à $\Gamma=10$ . Expériences réalisées pour des solides massifs étalons et un remplissage granulaire avec un toit. $f=50$ Hz .....	195

Figure 139. Puissance dissipée évaluée expérimentalement pour $\Gamma=3$ . Expériences réalisées pour des solides massifs étalons et un remplissage granulaire avec un toit. $f=50$ Hz .....	197
Figure 140. Puissance dissipée évaluée expérimentalement pour $\Gamma=5$ . Expériences réalisées pour des solides massifs étalons et un remplissage granulaire avec un toit. $f=50$ Hz .....	197
Figure 141. Puissance dissipée évaluée expérimentalement pour $\Gamma=10$ . Expériences réalisées pour des solides massifs étalons et un remplissage granulaire avec un toit. $f=50$ Hz .....	198
Figure 142. Modèle 1 d'oscillateur amorti par un frottement coulombien (OAC).....	200
Figure 143. Modèle 1 d'oscillateur amorti par un freinage visqueux (OAV) .....	200
Figure 144. Représentation schématique d'un modèle combinant dissipation d'énergie visqueuse et frottement coulombien (1-OAC&V).....	207
Figure 145. Représentation schématique du modèle 2 d'oscillateur harmonique amorti (OHA) .....	209
Figure 146. Représentation schématique du modèle 2, chariot frottant (CF) sans contact avec la paroi (contraction des ressorts $\delta = 0$ sur les deux côtés). .....	213
Figure 147. Représentation schématique de la force de répulsion qui s'ajoute aux forces de frottement lorsqu'il y a un contact avec la paroi.....	213
Figure 148. Evolution du coefficient de rigidité du modèle 2 (OHA) avec la masse totale pour $f=50$ Hz, $\Gamma=10$ .....	216
Figure 149. Masse apparente instantanée et fit en utilisant le modèle OHA (modèle 2) et le modèle CF (modèle 3).....	219
Figure 150. Puissances dissipées calculées directement et à l'aide du modèle 1 ou 2 pour $\Gamma=10$ , $f=50$ Hz, en fonction de la masse totale vibrée .....	222
Figure 151. Coefficient de frottement apparent instantané pour $\Gamma=3,5$ et 10 en fonction de la masse totale vibrée. Pour les solides massifs, les évolutions peuvent être assimilées à des droites d'équations $c=a M_{tot}+b$ .....	222
Figure 152. Estimation du coefficient de friction de la masse de sable vibrée.....	223
Figure 153. Représentation des contraintes dans un espace 2D (profondeur unité selon $\vec{Oz}$ ) .....	236
Figure 154. Représentation schématique des notations utilisées pour calculer l'équation de Janssen.....	239
Figure 155. A gauche : représentation schématique du milieu granulaire (considéré infini sur l'axe x). Au centre : les états de contraintes critiques, actif et passif. A droite : représentation des cercles de Mohr correspondant aux deux états .....	240
Figure 156. A gauche la représentation schématique d'une interpénétration. A droite, l'approximation du volume de contact à un cylindre de rayon $\alpha r_g$ et de longueur $2 r_g$ ...	241



# Communications diverses

## ➤ Revues à comité de lecture :

S. Nadler, O. Bonnefoy, J.M.-Chaix, G. Thomas and J.-L.-Gelet, "Parametric study of horizontally vibrated grain packings", *European Physical Journal E*. (2011) 34:66

2 articles rédigés à paraître

L. Olmos<sup>1</sup>, J.-M. Chaix<sup>1</sup>, S. Nadler<sup>2</sup>, O. Bonnefoy<sup>2</sup>, J.-L. Gelet<sup>3</sup>, G. Thomas<sup>2</sup>

Investigation of the permeability in a porous media by coupling X-ray microtomography and GeoDict simulations

L. Olmos<sup>1</sup>, J.-M. Chaix<sup>1</sup>, S. Nadler<sup>2</sup>, O. Bonnefoy<sup>2</sup>, J.-L. Gelet<sup>3</sup>, G. Thomas<sup>2</sup>, Study by X-Ray microtomography of the horizontal vibration effects on the sand's densification, *Materials Science and Engineering A*.

## ➤ Communications avec acte :

### *Communication Orale*

S. Nadler, O. Bonnefoy, J.-M. Chaix, J.-L. Gelet, G. Thomas, "Milieu granulaire soumis à des vibrations horizontales : simulations numériques", *GFC 2010* (Saint-Etienne)

### *Posters*

S. Nadler, O. Bonnefoy, J.M.-Chaix, A. Raihane, G. Thomas, J.-L. Gelet, "Modelling the influence of process parameters on the densification of granular media under horizontal vibrations", *SFGP2009* (Marseille)

S. Nadler, O. Bonnefoy, A. Raihane, J.-M. Chaix, J.-L. Gelet, G. Thomas, "Numerical Simulation of Granular Media Under Horizontal Vibrations", actes du congrès *AIP 2009* (Golden-Colorado)

A. Raihane, O. Bonnefoy, S. Nadler, J.L. Gelet, J.-M. Chaix, G. Thomas, "Convective Flow in a Horizontally Vibrated 3D Granular Packing", actes du congrès *AIP 2009* (Golden-Colorado)

## ➤ Communications sans acte :

### *Communication Orale*

S. Nadler, O. Bonnefoy, J.-M. Chaix, J.-L. Gelet, G. Thomas, « Utilisation de la méthode des éléments discrets (DEM) dans le cadre de l'étude d'un milieu granulaire vibré horizontalement. », *GFC 2011* (Limoges)

L. Olmos, S. Nadler, O. Bonnefoy, G. Thomas, J.-L. Gelet, J.L., J.-M. Chaix, Analyse 3D d'empilements vibrés de sable par analyse d'images tomographiques 3D *34° Journée ISS (International Society of Stereology) 2011*, Paris

### *Posters*

L. Olmos ; S. Nadler, S. ; O. Bonnefoy, J.-M. Chaix, G. Thomas, J.-L. Gelet, Characterization of vibrated sand packing by X-Ray microtomography *Euromat 2011* (European Congress and Exhibition on Advanced Materials and Processes), Montpellier

➤ Brevet :

Demande de brevet en France n° 1059004 déposée le 2 novembre 2010 au nom de  
MERSEN France SB sas

Inventeurs : Jean-Louis Gelet, Gérard Thomas, Olivier Bonnefoy, Sébastien Nadler





NNT : 2012 EMSE 0652

Sébastien NADLER

## Behaviour of a granular medium subjected to horizontal vibrations

Speciality : Engineering

Keywords : Granular Media, Horizontal vibrations, Densification, Simulation, Discrete Element Method

### Abstract :

This work on the densification of a granular medium under horizontal vibrations was realised in the context of an industrial study on sand in fuses, undertaken by the firm MERSEN. The scientific purpose is the understanding of the mechanisms involved in horizontally vibrated granular media. Both experiments and computer simulations were used.

Experiments were conducted with 500  $\mu\text{m}$  silica grains. Sinusoidal accelerations up to 10 g were applied to a container of a few centimetres using frequencies between 20 and 200 Hz. The experimental device enables instantaneous force, acceleration, grain velocity on the walls (PIV) and mean bulk density to be measured.

Discrete element method (DEM) was used for the computer simulations. Specific techniques were developed to analyse the results and compare them with experiments. Computer simulations provided data which are not experimentally available such as local values of density, velocities and stress inside the particle packing.

In the case of an open container, simulation results are in good agreement with experimental ones (convection rolls, thresholds, effect of acceleration...). Original results are obtained in both experiments and simulations, such as a grain velocity increase with the container length. Simulation provided specific results such as the effect of friction coefficients on the direction of rotation of convection rolls and the characterization of stress inside the particle packing. The flowability of grains across circular holes of various sizes was also studied.

The behaviour of sand in a closed container (confined medium) was studied during a progressive filling. Significant differences were observed when the filling rate becomes high. The dissipated energy and the apparent mass of the vibrated device were defined and measured using acceleration and force measurements. Specific models were built to analyse and understand the observed behaviour. Some results on the filling control were patented by MERSEN.

NNT : 2012 EMSE 0652

Sébastien NADLER

## COMPORTEMENT D'UN MILIEU GRANULAIRE SOUMIS A DES VIBRATIONS HORIZONTALES

Spécialité: Génie des procédés

Mots clefs : Milieux Granulaires, Vibrations Horizontales, Densification, Compaction, Simulation, Méthode des Eléments Discrets

### Résumé :

Cette étude de la compaction d'un empilement granulaire par vibrations horizontales a été réalisée dans le cadre d'un partenariat avec le groupe MERSEN pour une application au sable contenu dans ses fusibles. L'objectif scientifique est de développer la compréhension des mécanismes mis en jeu dans un milieu granulaire vibré horizontalement. Deux approches ont été utilisées en parallèle, l'une expérimentale, l'autre par simulation numérique.

L'approche expérimentale a été réalisée sur des grains de silice de diamètre moyen  $500\ \mu\text{m}$ . Un récipient de quelques centimètres est soumis à un mouvement sinusoïdal de fréquence comprise entre 20 et 200 Hz avec des accélérations allant jusqu'à 10 g. Le dispositif instrumenté permet la mesure instantanée de la force et de l'accélération, la vitesse des grains aux parois (PIV) ainsi que la densité globale du milieu.

L'approche numérique est basée sur la méthode des éléments discrets (DEM). Des méthodes spécifiques d'analyse des résultats ont été développées pour assurer la comparaison avec l'expérience. Elles permettent d'obtenir des informations qui ne sont pas accessibles expérimentalement comme les densités, vitesses et contraintes locales dans l'ensemble de l'empilement.

Dans le cas d'un récipient ouvert, la simulation permet de retrouver les résultats expérimentaux : rouleaux de convections, seuils de comportement, influence de l'accélération... Des résultats originaux ont été établis dans les expériences et les simulations comme une croissance de la vitesse des grains avec la longueur du récipient. La simulation a aussi permis d'obtenir des résultats spécifiques comme l'influence du coefficient de friction sur le sens des rouleaux et la caractérisation des contraintes au sein de l'empilement. L'écoulement des grains à travers des orifices circulaires de différentes dimensions a été également étudié.

Le comportement du sable dans un récipient fermé (milieu confiné) a été étudié au cours d'un remplissage progressif. Des différences significatives ont été constatées lorsque le taux de remplissage devient élevé. Des mesures d'accélération et de force sur l'ensemble du dispositif ont permis de définir et de mesurer une masse apparente et l'énergie dissipée par le dispositif. Des modèles descriptifs ont permis de comprendre les comportements observés. Ces résultats sont à l'origine d'un brevet déposé par le groupe MERSEN sur le contrôle du remplissage.